点 O を原点とする座標平面において，点 A と点 B が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ を満たすとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるような実数 k は存在しないことを示せ．

(2) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) 実数 t に対し，直線 OA 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるようにとる．同様に直線 OB 上の点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるようにとる．点 P を通り直線 OA と直交する直線を ℓ_1 とし，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を ℓ_2 とする．ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, t を用いて表せ．

(4) 3 点 O，A，B を通る円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(23 千葉大 5)

【答】

(1) 略

(2) $\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(16t-6)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(10-25t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

【解答】

$$(*)\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=5 & \cdots\cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2 & \cdots\cdots ② \\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

(1) 背理法を用いる．$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる実数 k が存在すると仮定する．②, ③ に代入すると

$$\begin{cases}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})=2 \\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})=3\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}5k^2=2 \\ 5k=3\end{cases}\qquad(\because ①)$$

第 2 式より　$k=\dfrac{3}{5}$ であり

$$(\text{第 1 式の左辺})=5\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{5}\fallingdotseq 2=(\text{第 1 式の右辺})$$

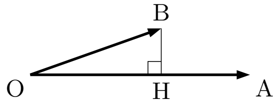
であり，$(*)$ を満たす k は存在しない．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるような実数 k は存在しない．　……(証明終わり)

(2) H は直線 OA 上の点であり，実数 l を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表すことができる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-l\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ であるから



$$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-l\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$3-5l=0\qquad\therefore\quad l=\frac{3}{5}$$

であり

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルであるから

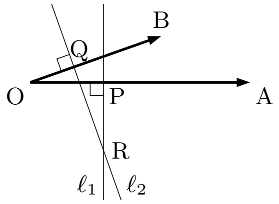
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad (\because\ \text{正射影ベクトルの公式})\\ &= \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad (\because\ ①,\ ③)\end{aligned}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

である．

(3) R は点 P を通り直線 OA と直交する直線 ℓ_1 と点 Q を通り直線 OB と直交する直線 ℓ_2 の交点である．実数 m, n を用いて



$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表すことができ

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 & \cdots\cdots ①\\ \overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

を満たす．

$$\begin{aligned}(①\text{の左辺}) &= (m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}} - t\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= 5(m-t)+3n\\ (②\text{の左辺}) &= (m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}} - (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= 3m+2(n-1+t)\end{aligned}$$

であるから

$$「①\ \text{かつ}\ ②」 \iff \begin{cases}5m+3n=5t\\ 3m+2n=2(1-t)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & m = 10t - 6(1-t) = 16t-6,\\ & n = -\{15t - 10(1-t)\} = 10-25t\end{aligned}$$

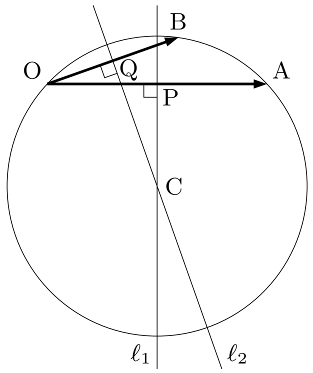
である．

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{(16t-6)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (10-25t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) 点 O，A，B を通る円の中心，すなわち △OAB の外心 C は，(3) の t が $t=\frac{1}{2}$ のときの点 R であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \left(16\times\frac{1}{2}-6\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(10-25\times\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= \boldsymbol{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．