平面上に，原点 O，点 A，点 B を頂点とする三角形 OAB がある．∠BOA の二等分線と ∠OAB の二等分線との交点を点 C とする．また，$|\overrightarrow{OA}| = 11$, $|\overrightarrow{OB}| = 13$, $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = 20$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 OAB の面積を求めよ．
(2) $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．
(3) 点 C を中心とする円が，線分 OA に接するとき，円の半径を求めよ．
(4) この平面上にある点 P は $|\overrightarrow{OP} - t\overrightarrow{OC}| = 6$ の関係を満たす．点 P の表す図形が，線分 OA に接するとき，t を求めよ．

(23 富山大 後 工・都市 2)

【答】

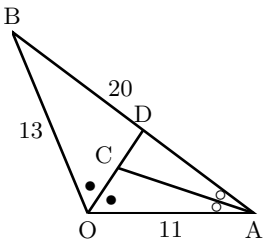
(1) 66
(2) $\overrightarrow{OC} = \dfrac{13\overrightarrow{OA} + 11\overrightarrow{OB}}{44}$
(3) 3
(4) $t = 2$

【解答】

(1) $|\overrightarrow{OA}| = 11$, $|\overrightarrow{OB}| = 13$, $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = 20$ であるから

$$|\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2 = 20^2$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{13^2 + 11^2 - 20^2}{2} = -55$$



△OAB の面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{11^2\times 13^2 - (-55)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{143^2 - 55^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{198\times 88} \\ &= \mathbf{66} \end{aligned}$$

……(答)

である．

- 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}} = \frac{11^2 + 13^2 - 20^2}{2\times 11\times 13} = -\frac{5}{13}$$

$$\therefore \quad \sin\angle\mathrm{AOB} = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

である．よって

$$S = \frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\sin\angle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}\times 11\times 13\times\frac{12}{13} = 66$$

である．

(2) ∠BOA の二等分線と線分 AB の交点を D とおく．

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| : |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 11 : 13$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{13\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 11\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{24}$$

である．また，AC は ∠OAD の二等分線なので

$$\mathrm{OC} : \mathrm{CD} = \mathrm{OA} : \mathrm{AD} = 11 : \frac{11}{24} \times 20 = 6 : 5$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{6}{11}\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{6}{11}\cdot\frac{13\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 11\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{24} = \boldsymbol{\frac{13\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 11\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{44}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 点 C を中心とし線分 OA に接する円は △OAB の内接円である．内接円の半径を r とすると，△OAB の面積 S は 3 つの三角形 △OAC，△ABC，△BOC の面積の和なので

$$S = \frac{1}{2}r(\mathrm{OA} + \mathrm{AB} + \mathrm{OB})$$

$$66 = \frac{1}{2}(11 + 20 + 13)r$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{r = 3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - t\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 6$ を満たす点 P が表す図形は，O を始点としたベクトル $t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の終点 T が中心で半径が 6 の円である．この円が線分 OA に接するときの接点を E とおく．

また，(3) の点 C を中心とする内接円が線分 OA に接するときの接点を F とおくと

$$\triangle\mathrm{OTE} \backsim \triangle\mathrm{OCF}$$

である．よって

$$\mathrm{OC} : \mathrm{OT} = \mathrm{CF} : \mathrm{TE}$$

$$\mathrm{OC} : t\mathrm{OC} = 3 : 6$$

$$\therefore \quad 3t = 6 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{t = 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．