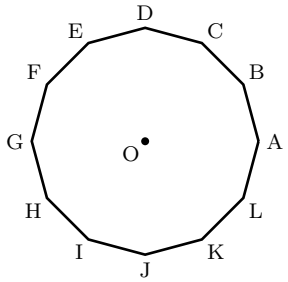
図のような正十二角形 ABCDEFGHIJKL を考える．この正十二角形に外接する円の中心を点 O とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．次の問いに答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．
(3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．
(4) $x = |\vec{a}|$ とする．この正十二角形の面積を x を用いて表せ．

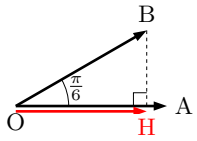
(23 富山大 理・工・都市 2)

【答】
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \sqrt{3}\vec{a} - \vec{b}$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\sqrt{3}\vec{a} + 2\vec{b}$
(4) $3x^2$

【解答】

(1) L は B の OA に関する対称点である．B から OA に下した垂線の足を H とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OL}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BH}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= 2\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\frac{\pi}{6}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (\because\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|)\\ &= \boldsymbol{\sqrt{3}\vec{a} - \vec{b}}\end{aligned}$$



……(答)

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルと呼ばれており，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

と一般化される．

(2) C は A の OB に関する対称点であるから，(1) の結果の A と B を入れ換えて

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{-\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}}$$

……(答)

である．

(3) D は B の OC に関する対称点であるから，(2) の結果の A を B，B を C とすればよい．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= -\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= -\vec{b} + \sqrt{3}(-\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b}) \quad (\because\ (2))\\ &= \boldsymbol{-\sqrt{3}\vec{a} + 2\vec{b}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(4) $x = |\vec{a}|$ のとき，正十二角形の面積は

$$12\times\triangle\mathrm{OAB} = 12\times\frac{1}{2}x^2\sin\frac{\pi}{6} = \boldsymbol{3x^2}$$

……(答)

である．