次の各問に答えよ．

(1) 同一直線上にない平面上の相異なる任意の 3 つの点 X，Y，Z に対して，$\angle$YXZ の二等分線はベクトル $\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{XY}}|}\overrightarrow{\mathrm{XY}}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{XZ}}|}\overrightarrow{\mathrm{XZ}}$ と平行であることを示せ．

平面上の OA $=2$, OB $=3$, AB $=4$ である三角形 OAB の内接円の中心を I とする．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

$\angle$OAB の外角の二等分線と直線 OI の交点を J とする．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(4) I から直線 OA に下ろした垂線を IH とするとき，IH の長さを求めよ．

(5) J から直線 AB に下ろした垂線を JK とするとき，JK の長さを求めよ．

(23 札幌医大 2)

【答】

(1) 略

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

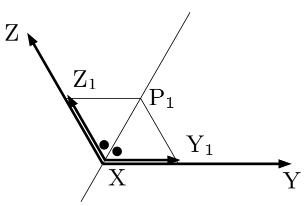
(3) $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(4) $\mathrm{IH}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

(5) $\mathrm{JK}=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

【解答】

(1) $\mathrm{Y_1}$, $\mathrm{Z_1}$, $\mathrm{P_1}$ を



$$\overrightarrow{\mathrm{XY_1}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{XY}}|}\overrightarrow{\mathrm{XY}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{YZ_1}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{XZ}}|}\overrightarrow{\mathrm{XZ}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{XP_1}}=\overrightarrow{\mathrm{XY_1}}+\overrightarrow{\mathrm{XZ_1}}$$

とおくと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{XY_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{XZ_1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$, $\overrightarrow{\mathrm{XZ}}$ と同じ向きの単位ベクトルであり，四辺形 $\mathrm{XY_1P_1Z_1}$ は辺の長さが 1 のひし形となる．ひし形の対角線 $\mathrm{XP_1}$ は $\angle\mathrm{Y_1XZ_1}$ すなわち，$\angle$YXZ を二等分する．

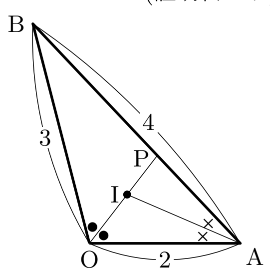
よって，$\angle$YXZ の二等分線上の点 P は，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{XP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=k\left(\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{XY}}|}\overrightarrow{\mathrm{XY}}+\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{XZ}}|}\overrightarrow{\mathrm{XZ}}\right)$$

と表すことができるから，$\angle$YXZ の二等分線はベクトル $\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{XY}}|}\overrightarrow{\mathrm{XY}}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{XZ}}|}\overrightarrow{\mathrm{XZ}}$ と平行である．

……(証明終わり)

(2) 三角形 OAB の内心 I は $\angle$AOB，$\angle$OAB の二等分線の交点である．(1) より，実数 k, l を用いて



$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=k\left(\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$
$$=\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\qquad\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = l\left(\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|}\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OI}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{l}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{l}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \left(1 - \frac{3l}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{l}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，①, ② を比較して

$$\begin{cases} \dfrac{k}{2} = 1 - \dfrac{3l}{4} \\ \dfrac{k}{3} = \dfrac{l}{4} \end{cases} \qquad \therefore\quad \begin{cases} 2k + 3l = 4 \\ 4k - 3l = 0 \end{cases} \qquad \therefore\quad k = \frac{2}{3},\ l = \frac{8}{9}$$

である．よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 幾何的に解くこともできる．$\angle$AOB の二等分線と線分 AB の交点を P とおくと

  $$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{OA} : \mathrm{OB} = 2 : 3$$

  であり

  $$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$$

  である．さらに，内心 I は線分 OP 上にあり，AI は $\angle$OAP の二等分線であるから

  $$\mathrm{OI} : \mathrm{IP} = \mathrm{OA} : \mathrm{AP} = 2 : \left(\frac{2}{5} \times 4\right) = 5 : 4$$

  よって

  $$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

  である．

(3) $\angle$OAB の外角の二等分線上の点 J は，実数 m を用いて

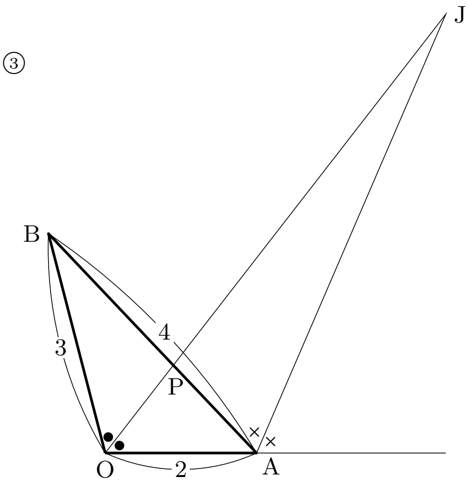
$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = m\left(\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OJ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{m}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \left(1 + \frac{m}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots ③$$

と表すことができる．また，直線 OI 上の点 J は実数 k を用いて，① として表すこともできる．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，①, ③ を比較して



$$\begin{cases} \dfrac{k}{2} = 1 + \dfrac{m}{4} \\ \dfrac{k}{3} = \dfrac{m}{4} \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} 2k - m = 4 \\ 4k - 3m = 0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad k = 6,\ m = 8$$

である．よって

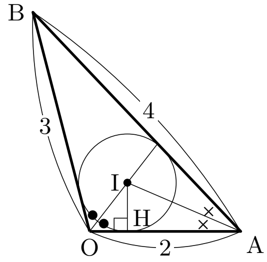
$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) IH は内接円の半径である．三角形 OAB の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{IH}(\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{AB})$$

$$\therefore\quad \mathrm{IH} = \frac{2S}{\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{AB}}$$



である．また AB $= 4$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 4^2$$

$$3^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2^2 = 16$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{9+4-16}{2} = -\frac{3}{2}$$

であり

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2^2\times 3^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

でもある．よって

$$\mathrm{IH} = \frac{2\times\dfrac{3\sqrt{15}}{4}}{2+3+4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) 点 J から直線 OA に下した垂線の足を L とおく．

$\triangle$AJK $\equiv$ $\triangle$AJL より

$$\mathrm{JK} = \mathrm{JL}$$

また，$\triangle$OIH $\backsim$ $\triangle$OJL であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = 9\overrightarrow{\mathrm{OI}}$$

であるから

$$\mathrm{JK} = \mathrm{JL} = 9\mathrm{IH}$$

$$= 9\times\frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{15}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．