正 12 角形の頂点が反時計回りに A_1, A_2, $\cdots$, A_{12} の順で位置している．この正 12 角形の外接円の半径は 1 であり，外接円の中心を O とする．$\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OA_2}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えなさい．

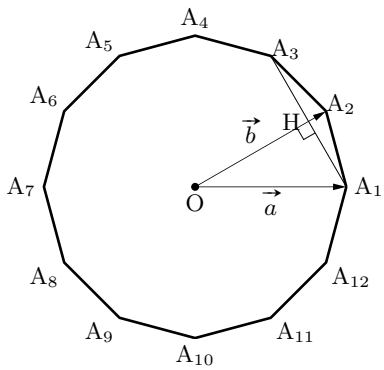
(i) $\overrightarrow{OA_4}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい．
(ii) $\overrightarrow{A_4A_9}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(23 福島大 人間発達文化 4(2))

【答】

(i) $\overrightarrow{OA_4}=2\vec{b}-\sqrt{3}\vec{a}$
(ii) $\overrightarrow{A_4A_9}=(1+\sqrt{3})\vec{a}-(2+\sqrt{3})\vec{b}$

【解答】



(i) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12$ に対し，$|\overrightarrow{OA_n}|=1$ であり，$\angle A_nOA_{n+1}=\dfrac{\pi}{6}$ である．ただし，$A_{13}=A_1$ とする．

A_3 は A_1 の直線 OA_2 に関する対称点であり，A_4 は A_2 の直線 OA_3 に関する対称点である．

A_1 から直線 OA_2 に下ろした垂線の足を H とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_3}&=\overrightarrow{OA_1}+2\overrightarrow{A_1H}\\&=\overrightarrow{OA_1}+2(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA_1})\\&=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA_1}\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{OH}$ は $\overrightarrow{OA_1}$ の $\overrightarrow{OA_2}$ への正射影ベクトルであるから

$$\overrightarrow{OH}=\frac{|\overrightarrow{OH}|}{|\overrightarrow{OA_2}|}\overrightarrow{OA_2}=\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$$

であり

$$\overrightarrow{OA_3}=\sqrt{3}\vec{b}-\vec{a}$$

となる．

次に，$\overrightarrow{OA_4}$ は，$\vec{a}$ を $\vec{b}$，$\vec{b}$ を $\overrightarrow{OA_3}$ に置き換えればよいから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_4}&=\sqrt{3}\overrightarrow{OA_3}-\vec{b}\\&=\sqrt{3}(\sqrt{3}\vec{b}-\vec{a})-\vec{b}\\&=\boldsymbol{2\vec{b}-\sqrt{3}\vec{a}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(ii) $\overrightarrow{OA_9}=-\overrightarrow{OA_3}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_4A_9}&=(-\overrightarrow{OA_3})-\overrightarrow{OA_4}\\&=-(\sqrt{3}\vec{b}-\vec{a})-(2\vec{b}-\sqrt{3}\vec{a})\\&=\boldsymbol{(1+\sqrt{3})\vec{a}-(2+\sqrt{3})\vec{b}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．