平面上の定点 O，A，B に対し，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3,\ |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4$ とする．点 P が $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ を満たしながら動くとき，P の描く曲線の長さを求めよ．

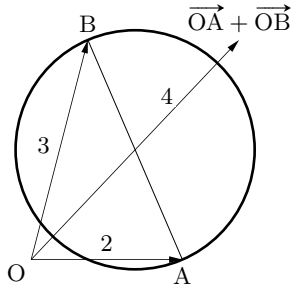
(23 三重大 医・工 1(2))

【答】 $\sqrt{10}\pi$

【解答】

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$



したがって，点 P は

A，B と一致する
または
$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ を満たす．

すなわち，① を満たす P の描く曲線は

AB を直径とする円

であり，求める長さは円周

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\pi$$

である．

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3,\ |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=4^2$$

$$4+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9=16$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3}{2}$$

である．これより

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=9-2\times\frac{3}{2}+4\\&=10\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{10}$$

よって，求める長さは

$$\boldsymbol{\sqrt{10}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ① は次のようにも変形できる．

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|^2=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}{4}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{2}$$

したがって，点 P の描く曲線は，線分 AB の中点を中心とし，半径を $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ とする円である．