平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に異なる 3 点 A，B，C をとる．$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ．さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ も成り立つとき，△ABC の三辺の長さの和を求めよ．

(23 三重大 後 工 1(3))

【答】 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{1}{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=3\sqrt{3}$

【解答】

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ である．$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ の辺々を 2 乗すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$1^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+1^2=1^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{1}{2}}\qquad\cdots\cdots ①$$

……(答)

である．さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ が成り立つから

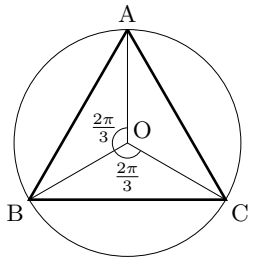
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots ②$$

でもある．

① より

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{-\frac{1}{2}}{1\times1}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{AOB}=\frac{2\pi}{3}$$



同じく，② より

$$\angle\mathrm{BOC}=\frac{2\pi}{3}$$

である．A，B，C は同一円周上の異なる 3 点であるから

$$\angle\mathrm{COA}=2\pi-\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

であり，△ABC は正三角形である．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=1^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+1^2\\&=1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\\&=3\end{aligned}$$

よって，△ABC の三辺の長さの和は

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$$

……(答)

である．