$\triangle$OAB が $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{2}$ および $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ を満たすとする．t を $0<t<1$ を満たす実数とし，辺 AB を $1-t:t$ に内分する点を C，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を D とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．
(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$ を最小にする t の値 t_0 と $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$ の最小値を求めよ．
(3) (2) の t_0 に対して，$t=t_0$ とする．直線 OC と直線 AD の交点を M とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$ の値を求めよ．

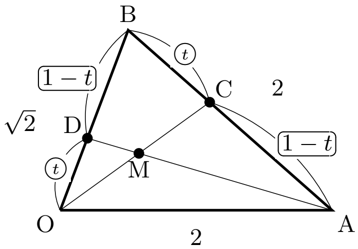
(23 室蘭工大 5)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1$
(2) $t_0=\dfrac{1}{6}$，最小値 $\dfrac{11}{6}$
(3) $\dfrac{8}{31}$

【解答】

(1) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．



$|\overrightarrow{a}|=2$, $|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}|=2$ より

$$|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}|^2=4$$
$$|\overrightarrow{b}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{a}|^2=4$$
$$2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4=4$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1}$$ ……(答)

である．

(2) C は辺 AB を $1-t:t$ に内分する点，D は辺 OB を $t:1-t$ に内分する点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\overrightarrow{b}$ と表すことができる．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2&=|t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}|^2+|t\overrightarrow{b}|^2\\&=\{4t^2+2t(1-t)+2(1-t)^2\}+2t^2\\&=6t^2-2t+2\\&=6\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{6}\end{aligned}$$

である．$0<t<1$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$ を最小にする t の値 t_0 は

$\boldsymbol{t_0=\dfrac{1}{6}}$ であり，最小値は $\boldsymbol{\dfrac{11}{6}}$ ……(答)

である．

(3) $t=t_0=\dfrac{1}{6}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{a}+\frac{5}{6}\overrightarrow{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{b}$$

である．直線 OC と直線 AD の交点 M は，実数 k, s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= \frac{k}{6}\vec{a} + \frac{5k}{6}\vec{b} \qquad \cdots\cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\ &= (1-s)\vec{a} + \frac{s}{6}\vec{b} \qquad \cdots\cdots \text{②}\end{aligned}$$

と表すことができる．$\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}$，$\vec{b} \fallingdotseq \vec{0}$，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ (1 次独立) なので，①，②の係数を比較して

$$\begin{cases}\dfrac{k}{6} = 1-s\\ \dfrac{5k}{6} = \dfrac{s}{6}\end{cases} \qquad \therefore \quad k = \frac{6}{31},\ s = \frac{30}{31}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{31}\vec{a} + \frac{5}{31}\vec{b}$$

であり

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = \frac{1}{31}\sqrt{|\vec{a}+5\vec{b}|^2} = \frac{1}{31}\sqrt{4+10+25\times 2} = \boldsymbol{\frac{8}{31}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

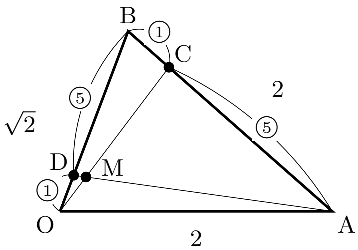
である．

- メネラウスの定理を用いてもよい．

  $t = t_0 = \dfrac{1}{6}$ のとき

  $$t : 1-t = \frac{1}{6} : \frac{5}{6} = 1 : 5$$

  であり，右図を得る．



  $$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MC}} \times \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AB}} \times \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DO}} = 1$$
  $$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MC}} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{1} = 1$$
  $$\therefore \quad \mathrm{OM} : \mathrm{MC} = 6 : 25$$

  したがって

  $$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{6}{31}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \left(= \frac{1}{31}\vec{a} + \frac{5}{31}\vec{b}\right)$$

  である．また $t = t_0 = \dfrac{1}{6}$ のとき，(2) より $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 = \dfrac{11}{6}$ であるから

  $$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = \frac{11}{6} - |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 = \frac{11}{6} - \left|\frac{1}{6}\vec{b}\right|^2 = \frac{11}{6} - \frac{1}{18} = \frac{16}{9}$$

  であり

  $$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = \frac{6}{31} \times \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{8}{31}$$

  である．