

$\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ とする. t をすべての実数とするととき $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値を求めよ.

(23 札幌医大 1(1))

【答】 $\sqrt{10}$

【解答】

$\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ のとき

$$\begin{aligned} |\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= (9 + 1 + 4) + 2t(6 - 2 + 2) + t^2(4 + 4 + 1) \\ &= 9t^2 + 12t + 14 \\ &= 9\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + 10 \end{aligned}$$

であり, $t = -\frac{2}{3}$ のとき, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ は

最小値 $\sqrt{10}$

……(答)

をとる.

- $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$ は直線のベクトル方程式であり, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ が最小となるのは $\vec{p} \cdot \vec{b} = 0$ となるときである.

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{b} &= \{(3, -1, 2) + t(2, 2, 1)\} \cdot (2, 2, 1) \\ &= (6 - 2 + 2) + t(4 + 4 + 1) \\ &= 9t + 6 \end{aligned}$$

であり, $|\vec{p}|$ は

$$9t + 6 = 0 \quad \therefore t = -\frac{2}{3}$$

のとき最小となる. このとき

$$\vec{p} = (3, -1, 2) - \frac{2}{3}(2, 2, 1) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

であり, 求める最小値は

$$\frac{1}{3}\sqrt{25 + 49 + 16} = \frac{\sqrt{90}}{3} = \sqrt{10}$$

である.

