座標平面上に 3 点 A(0, 2)，B(4, 0)，C(7, 6) がある．点 P は座標平面上を

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$$

を満たしながら動くとする．

(1) 点 P の軌跡を図示せよ．また，軌跡と x 軸，y 軸との共有点を求めよ．
(2) △ABP の面積が最大になるときの P の座標および △ABP の面積を求めよ．

(23 東京海洋大 海洋工 1)

【答】

(1) 図は略．共有点は (1, 0)， (4, 0)，(0, 2)

(2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2},\ 2+\sqrt{5}\right)$，面積は $\dfrac{5+5\sqrt{5}}{2}$

【解答】

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) A(0, 2)，B(4, 0)，C(7, 6) であるから，点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

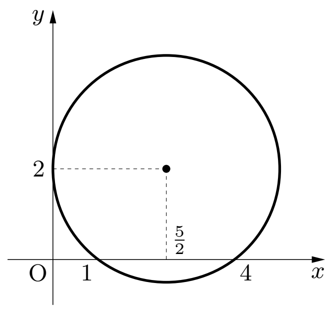
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}) &= (x,\ y-2)\cdot\{2(x-4,\ y)+(x-7,\ y-6)\}\\ &= (x,\ y-2)\cdot(3x-15,\ 3y-6)\\ &= 3x(x-5)+3(y-2)^2\end{aligned}$$

であり

$$① \iff x(x-5)+(y-2)^2=0$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ①'$$

よって，点 P の軌跡は点 $\left(\dfrac{5}{2},\ 2\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{5}{2}$ の円である．図示すると右図となる．



①′ において $y=0$ とすると

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+4=\frac{25}{4}$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ x=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}=1,\ 4$$

同様に，①′ において $x=0$ とすると

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$(y-2)^2=0$$

$$\therefore\ y=2$$

よって，軌跡と x 軸との共有点は

(1, 0), (4, 0) ……(答)

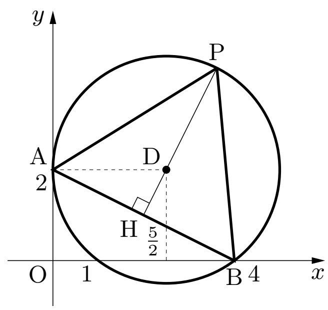
であり，軌跡と y 軸との共有点は

(0, 2) ……(答)

である．

(2) 点 P の軌跡である円を K，その中心を D とおく．

点 P から直線 AB に下した垂線の足を H とおくと，△ABP の面積が最大となるのは，3 点 P，D，H がこの順に一直線上に並ぶときである．A，B は円 K 上の点なので，H は線分 AB の中点であり，H(2, 1) である．



$$\mathrm{HD} = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + (2-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

であり

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HP}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \frac{\mathrm{HP}}{\mathrm{HD}}\overrightarrow{\mathrm{HD}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\overrightarrow{\mathrm{HD}} \\
&= (2,\ 1) + (1+\sqrt{5})\left(\frac{1}{2},\ 1\right) \\
&= \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2},\ 2+\sqrt{5}\right)
\end{aligned}$$

よって，P の座標は

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{5+\sqrt{5}}{2},\ 2+\sqrt{5}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，△ABP の面積は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PH} &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4^2+2^2}\cdot\frac{\sqrt{5}+5}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{5+5\sqrt{5}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．