△ABC と △DEF は以下の（ア）と（イ）の条件をそれぞれみたす．

（ア）$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})=0$
（イ）$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{DE}$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) △ABC はどのような三角形か推定し，その推定が正しいことを証明せよ．
(2) △DEF はどのような三角形か推定し，その推定が正しいことを証明せよ．

(23 東京海洋大 生命・資源 3)

【答】

(1) △ABC は AB = BC の二等辺三角形である．
(2) △DEF は正三角形である．

【解答】

(1) (ア) の始点を B にそろえると

$$\begin{aligned}(\text{ア}) &\iff (-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})\cdot(-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=0\\ &\iff (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=0\end{aligned}$$

A と C を入れかえても式は成り立つから,「△ABC は AB = BC の二等辺三角形である」と推定される．(ア) の変形を続けると

$$\begin{aligned}&(\text{ア}) \iff |\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2=0\\ &\therefore\quad |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|\end{aligned}$$

よって，推定は正しい． …… (証明終わり)

(2) (イ) を変形すると

$$(\text{イ}) \iff \begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{FD})=0 & \cdots\cdots ①\\ \overrightarrow{FD}\cdot(\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{DE})=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

① は E と F，② は F と D を入れかえても式は成り立つから，DE = DF かつ EF = ED，すなわち「△DEF は正三角形である」と推定される．

① の変形を続ける．

$$\begin{aligned}&① \iff (\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF})=0\\ &|\overrightarrow{DF}|^2-|\overrightarrow{DE}|^2=0\\ &\therefore\quad |\overrightarrow{DF}|=|\overrightarrow{DE}| \qquad \cdots\cdots ①'\end{aligned}$$

を得る．同様に ② は

$$\begin{aligned}&② \iff (\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EF})\cdot(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{ED})=0\\ &|\overrightarrow{ED}|^2-|\overrightarrow{EF}|^2=0\\ &\therefore\quad |\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{EF}| \qquad \cdots\cdots ②'\end{aligned}$$

を得る．①′, ②′ より DE = EF = FD であるから，△DEF は正三角形である．

よって，推定は正しい． …… (証明終わり)