座標空間の原点を O とする．yz 平面上の点 A，zx 平面上の点 B，xy 平面上の点 C に対して

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \geqq 2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

が成り立つことを示せ．ただし座標空間の 2 つの点 P，Q に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の内積を表す.

(23 東北大 後 理 3 文 3)

【答】 略

【解答】

yz 平面上の点 A，zx 平面上の点 B，xy 平面上の点 C の座標をそれぞれ

$$\mathrm{A}(0,\ a_2,\ a_3),\quad \mathrm{B}(b_1,\ 0,\ b_3),\quad \mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ 0)$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\
&=({a_2}^2+{a_3}^2)+({b_1}^2+{b_3}^2)+({c_1}^2+{c_2}^2)-2(b_1c_1+c_2a_2+a_3b_3)\\
&=(b_1-c_1)^2+(c_2-a_2)^2+(a_3-b_3)^2\\
&\geqq 0 \quad (\because\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_3,\ c_1,\ c_2 \text{はすべて実数})
\end{aligned}$$

よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 \geqq 2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

が成り立つ.　　　　…… (証明終わり)