原点を O とする座標平面上に 3 点 A，B，C がある．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{v}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{w}$ とおく．

$\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$ とするとき，3 つのベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ は

$$\begin{cases}\vec{u}=-\vec{e_1}, \\ \vec{v}\cdot\vec{e_1}=4, \quad |\vec{v}|=2\sqrt{5}, \quad \vec{v}\cdot\vec{e_2}<0, \\ \vec{w}\cdot\vec{e_1}=8, \quad |\vec{w}|=8\sqrt{2}, \quad \vec{w}\cdot\vec{e_2}>0\end{cases}$$

を満たすとする．ただし，$|\vec{x}|$ はベクトル $\vec{x}$ の大きさを表し，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ は 2 つのベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ．

(3) 3 点 A，B，C を通る円の中心を P とするとき，△ABC の面積と △ABP の面積の比を求めよ．

(23 熊本大 医 2)

【答】

(1) A$(-1,\ 0)$, B$(3,\ -2)$, C$(11,\ 6)$

(2) $x^2+y^2-8x-10y-9=0$

(3) $8:5$

【解答】

(1) 3 点 A，B，C の座標をそれぞれ $(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$，$(c_1,\ c_2)$ とおくと

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2),\\ \vec{v}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2),\\ \vec{w}&=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(c_1-b_1,\ c_2-b_2),\\ \vec{e_1}&=(1,\ 0),\\ \vec{e_2}&=(0,\ 1)\end{aligned}$$

であり，与えられた条件を成分表示すると

$$\begin{cases}(a_1,\ a_2)=-(1,\ 0) & \cdots\cdots ① \\ b_1-a_1=4, \quad \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}=2\sqrt{5}, \quad b_2-a_2<0 & \cdots\cdots ② \\ c_1-b_1=8, \quad \sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}=8\sqrt{2}, \quad c_2-b_2>0 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

となる．① より

$$(a_1,\ a_2)=(-1,\ 0) \qquad \cdots\cdots ①'$$

①′ を ② に代入すると，② は

$$\begin{cases}b_1+1=4 \\ \sqrt{(b_1+1)^2+{b_2}^2}=2\sqrt{5} \\ b_2<0\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}b_1=3 \\ 16+{b_2}^2=20 \\ b_2<0\end{cases}$$

$$\therefore \quad b_1=3, \quad b_2=-2 \qquad \cdots\cdots ②'$$

②′ を ③ に代入すると

$$\begin{cases} c_1 - 3 = 8 \\ (c_1 - 3)^2 + (c_2 + 2)^2 = 8\sqrt{2} \\ c_2 + 2 > 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} c_1 = 11 \\ 64 + (c_2 + 2)^2 = 128 \\ c_2 > -2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad c_1 = 11, \quad c_2 = 6$$

となる．よって，A，B，C の座標は

$$\mathbf{A(-1,\ 0),\ B(3,\ -2),\ C(11,\ 6)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 3 点 A，B，C を通る円の方程式を定数 $p,\ q,\ r$ を用いて

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$$

と表すと

$$\begin{cases} \mathrm{A} : 1 + 0 - p + 0 + r = 0 \\ \mathrm{B} : 9 + 4 + 3p - 2q + r = 0 \\ \mathrm{C} : 121 + 36 + 11p + 6q + r = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p - r = 1 \\ 3p - 2q + r = -13 \\ 11p + 6q + r = -157 \end{cases} \iff \begin{cases} r = p - 1 \\ 4p - 2q = -12 \\ 12p + 6q = -156 \end{cases} \iff \begin{cases} r = p - 1 \\ 2p - q = -6 \\ 2p + q = -26 \end{cases}$$

$$\therefore \quad p = -8,\ q = -10,\ r = -9$$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 8x - 10y - 9 = 0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (12,\ 6)$ より，△ABC の面積 S_{C} は

$$S_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}|4 \times 6 - (-2) \times 12| = 24$$

である．また，(2) の結果の式は

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 50$$

と変形されるから，円の中心 P の座標は $(4,\ 5)$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (5,\ 5)$$

である．よって，△ABP の面積 S_{P} は

$$S_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}|4 \times 5 - (-2) \times 5| = 15$$

である．よって，△ABC の面積と △ABP の面積の比は

$$S_{\mathrm{C}} : S_{\mathrm{P}} = 24 : 15 = \mathbf{8 : 5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．