平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が次の条件

$$|\vec{a}+2\vec{b}|=|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5} \text{ かつ } \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{49}$$

を満たすとき，$|\vec{a}|=$ （ち），$|\vec{b}|=$ （つ） である．

(23 茨城大 後 工 2(5))

【答】

（ち）	（つ）
$\frac{5}{7}$	$\frac{5\sqrt{2}}{7}$

【解答】

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{49}$ であるから

$$\begin{cases}|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{5}\\ |3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}|\vec{a}|^2+4\times\frac{5}{49}+4|\vec{b}|^2=5\\ 9|\vec{a}|^2-6\times\frac{5}{49}+|\vec{b}|^2=5\end{cases}$$

$$\begin{cases}|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2=\frac{225}{49}\\ 9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=\frac{275}{49}\end{cases}$$

よって

$$|\vec{a}|^2=\frac{1}{35}\times\frac{275\times4-225}{49}=\frac{5^2(11\times4-9)}{35\times7^2}=\frac{5^2}{7^2}$$

$$|\vec{b}|^2=\frac{1}{35}\times\frac{225\times9-275}{49}=\frac{5^2(9\times9-11)}{35\times7^2}=\frac{5^2\times2}{7^2}$$

であり

$$\boldsymbol{|\vec{a}|=\frac{5}{7},\quad |\vec{b}|=\frac{5\sqrt{2}}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．