平行四辺形 OABC において，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ とし，辺 AB の中点を M，辺 BC を $1:2$ に内分する点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ を求めよ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ をそれぞれ $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．
(3) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．
(4) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$ を求めよ．

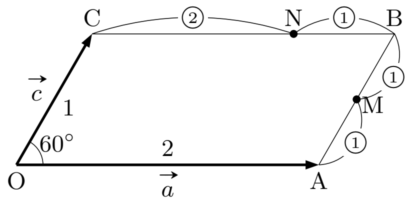
(23 金沢工大 B 2)

【答】
(1) 1
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{c}}{3}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\dfrac{-2\vec{a}+3\vec{c}}{6}$
(4) $|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$

【解答】
(1) 右図の平行四辺形より

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{c}&=2\times1\times\cos60^\circ\\&=\mathbf{1}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(2) 分点公式より

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

$$=\frac{\vec{a}+(\vec{a}+\vec{c})}{2}=\boldsymbol{\frac{2\vec{a}+\vec{c}}{2}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{2(\vec{a}+\vec{c})+\vec{c}}{3}=\boldsymbol{\frac{2\vec{a}+3\vec{c}}{3}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2\vec{a}+3\vec{c}}{3}-\frac{2\vec{a}+\vec{c}}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{-2\vec{a}+3\vec{c}}{6}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) (3) より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2&=\frac{1}{6^2}|-2\vec{a}+3\vec{c}|^2\\&=\frac{1}{36}\left\{4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2\right\}\\&=\frac{1}{36}(4\times2^2-12\times1+9\times1^2)\\&=\frac{13}{36}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\frac{\sqrt{13}}{6}$$

である．