四面体 OABC において $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．また，線分 AB, AC 上にそれぞれ点 P，Q をとり，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=s$, $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=t$ とおく．

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$, $|\vec{a}|=\dfrac{1}{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$ が成り立っているとして，以下の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ．また，$\triangle$APQ の面積を s, t を用いて表せ．

(2) 点 O から $\triangle$ABC に下ろした垂線と $\triangle$ABC との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が成り立っているとき，$\triangle$APQ の面積を求めよ．

(23 三重大 教育・生資・人文・医 (看) 2)

【答】

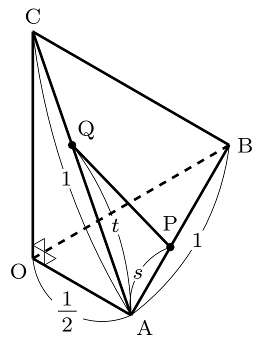
(1) $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$，$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}st$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}$

(3) $\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{\sqrt{15}}{50}$

【解答】

(1) $\triangle$OAB，$\triangle$OAC は



$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2},\ \mathrm{OA}=\frac{1}{2},\ \mathrm{AB}=1$$
$$\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{2},\ \mathrm{OA}=\frac{1}{2},\ \mathrm{AC}=1$$

であるから，合同な直角三角形であり

$$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．したがって，$\triangle$OBC は直角二等辺三角形であり

$$\mathrm{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

である．$\triangle$ABC において余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos\theta=\cos\angle\mathrm{BAC}&=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}\\&=\frac{1^2+1^2-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{2\times1\times1}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．これにより

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

であり

$$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\sin\theta=\frac{1}{2}\times s\times t\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{8}st}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

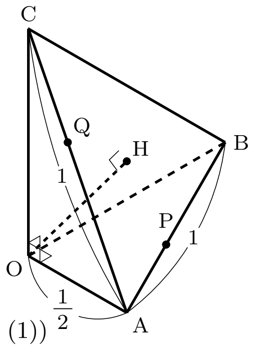
(2) H は △ABC 上の点であるから，実数 u, v を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AB}}+v\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表すことができる．OH ⊥ △ABC より

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}\quad\cdots\cdots\ (*)$$

が成り立つ．



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AB}}+v\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &=\frac{1}{2}\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}+u\times1^2+v\times1\times1\times\frac{1}{4}\quad(\because\ (1))\\ &=-\frac{1}{4}+u+\frac{v}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AB}}+v\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &=\frac{1}{2}\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}+u\times1\times1\times\frac{1}{4}+v\times1^2\quad(\because\ (1))\\ &=-\frac{1}{4}+\frac{u}{4}+v\end{aligned}$$

であるから

$$(*)\iff\begin{cases}-\dfrac{1}{4}+u+\dfrac{v}{4}=0\\ -\dfrac{1}{4}+\dfrac{u}{4}+v=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}4u+v=1\\ u+4v=1\end{cases}\qquad\therefore\quad u=v=\frac{1}{5}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &=\vec{a}+\frac{1}{5}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{1}{5}(\vec{c}-\vec{a})\\ &=\boldsymbol{\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}}\quad\cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

……(答)

である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が成り立っているとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{1}{2}\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}+\frac{1}{2}\{(1-t)\vec{a}+t\vec{c}\}\\ &=\frac{2-s-t}{2}\vec{a}+\frac{s}{2}\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}\quad\cdots\cdots\ ②\end{aligned}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立であるから，①, ② の係数を比較すると

$$\begin{cases}\dfrac{2-s-t}{2}=\dfrac{3}{5}\\ \dfrac{s}{2}=\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{5}\end{cases}\qquad\therefore\quad s=t=\frac{2}{5}\quad(3\ \text{式を満たす})$$

よって，(1) より

$$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{50}}$$

……(答)

である．