四面体 OABC がある．u を $0<u<1$ をみたす実数とする．辺 OA を $u:1-u$ に内分する点を D，辺 AB を $u:1-u$ に内分する点を E とし，線分 OE と線分 BD の交点を P とする．また，辺 OC を $u:1-u$ に内分する点を F，辺 CB を $u:1-u$ に内分する点を G とし，線分 OG と線分 BF の交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$. $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．このとき，以下の空欄をうめよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, u を用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, u のうち必要なものを用いて表すと $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=$ $\boxed{\text{ロ}}$ である．

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ がすべて単位ベクトルで，どの 2 つも直交しているとする．このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ は $u=$ $\boxed{\text{ハ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ニ}}$ をとる．

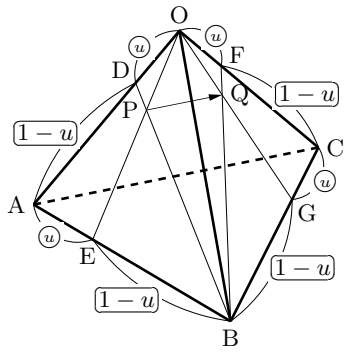
(23 会津大 コンピュータ理工 2)

【答】

イ	ロ	ハ	ニ
$\dfrac{u}{u^2-u+1}\{(1-u)\vec{a}+u\vec{b}\}$	$\dfrac{u(1-u)}{u^2-u+1}(\vec{c}-\vec{a})$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

【解答】

(1) △OAE と直線 DP にメネラウスの定理を用いると



$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}}=1$$
$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{1-u}{1}\cdot\frac{1-u}{u}=1$$
$$\therefore\quad \mathrm{OP}:\mathrm{PE}=u:(1-u)^2$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{u}{u+(1-u)^2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{u}{u^2-u+1}\{(1-u)\vec{a}+u\vec{b}\}}$$

……(答)

である．

(2) (1) の A を C と置き換えることにより，P が Q となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{u}{u^2-u+1}\{(1-u)\vec{c}+u\vec{b}\}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{u}{u^2-u+1}\{(1-u)\vec{c}-(1-u)\vec{a}\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{u(1-u)}{u^2-u+1}(\vec{c}-\vec{a})}$$

……(答)

である．

(3)
$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\left|\frac{u(1-u)}{u^2-u+1}\right||\vec{c}-\vec{a}|$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ がすべて単位ベクトルで，どの 2 つも直交しているから

$$|\vec{c}-\vec{a}|=\sqrt{|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2}=\sqrt{1^2-2\times0+1^2}=\sqrt{2}$$

である．また

$$\left|\frac{u(1-u)}{u^2-u+1}\right|=\left|\frac{-(u^2-u+1)+1}{u^2-u+1}\right|=\left|-1+\frac{1}{u^2-u+1}\right|$$

$u^2-u+1=\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ $(0<u<1)$ より

$$\frac{3}{4} \leqq u^2-u+1<1 \quad \left(\text{等号は } u=\frac{1}{2} \text{ のとき成り立つ}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{4}{3} \geqq \frac{1}{u^2-u+1}>1$$

$$\therefore \quad 0<-1+\frac{1}{u^2-u+1} \leqq \frac{1}{3}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ は

$$u=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \text{ のとき，最大値 } \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．