座標空間における 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で構成された四面体 OABC がある．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，以下の問いに答えなさい．解答欄には途中の計算過程も書きなさい．

(1) $0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対して，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を M，辺 CO を $t:(1-t)$ に内分する点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t を用いて表しなさい．

(2) $0 \leqq u < 1$ を満たす実数 u に対して，線分 MC を $u:(1-u)$ に内分する点を P とする．実数 x, y, z を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ と表すとき，ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数の和 $x+y$ を u を用いて表しなさい．

(3) 線分 MN の中点 Q に対し，直線 OQ と 3 点 A，B，C が定める平面との交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t を用いて表しなさい．

(4) 線分 OR の長さの最小値を求めなさい．

(23 公立千歳科技大 中期 理工 5)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=-(1-t)\vec{a}-t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

(2) $x+y=1-u$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2-t}\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\}$

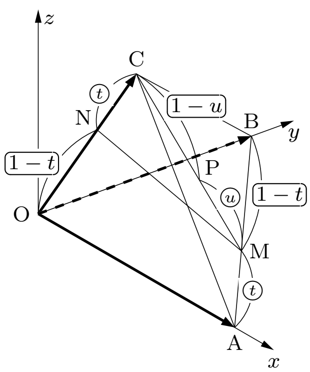
(4) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

【解答】

(1) M は辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点，N は辺 CO を $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}&=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=(1-t)\vec{c}-\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\\&=\boldsymbol{-(1-t)\vec{a}-t\vec{b}+(1-t)\vec{c}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．



(2) P は線分 MC を $u:(1-u)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OM}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(1-u)\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}+u\vec{c}\\&=(1-u)(1-t)\vec{a}+(1-u)t\vec{b}+u\vec{c}\end{aligned}$$

である．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ と表すときの $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数の和 $x+y$ は

$$x+y=(1-u)(1-t)+(1-u)t=\boldsymbol{1-u}$$ ……(答)

である．

(3) Q は線分 MN の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}}{2}\\&=\frac{\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}+(1-t)\vec{c}}{2}\\&=\frac{1-t}{2}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+\frac{1-t}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

であり，直線 OQ 上の点である R は実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= \frac{k(1-t)}{2}\vec{a} + \frac{kt}{2}\vec{b} + \frac{k(1-t)}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

と表すことができる．さらに，R は平面 ABC 上の点でもあるから

$$\frac{k(1-t)}{2} + \frac{kt}{2} + \frac{k(1-t)}{2} = 1$$

$$\frac{k(2-t)}{2} = 1$$

$$\therefore\quad k = \frac{2}{2-t}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{\frac{1}{2-t}\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b} + (1-t)\vec{c}\}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $\vec{a} = (1,\ 0,\ 0),\ \vec{b} = (0,\ 1,\ 0),\ \vec{c} = \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0,\ \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{1}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2 &= \frac{1}{(2-t)^2}|(1-t)\vec{a} + t\vec{b} + (1-t)\vec{c}|^2\\ &= \frac{1}{(2-t)^2}\{(1-t)^2 + t^2 + (1-t)^2 + 0 + 0 + 2(1-t)^2 \times \frac{1}{2}\}\\ &= \frac{1}{(2-t)^2}\{3(1-t)^2 + t^2\}\end{aligned}$$

$2-t = s$ とおくと

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2 &= \frac{1}{s^2}\{3(1-(2-s))^2 + (2-s)^2\}\\ &= \frac{3(s-1)^2 + (2-s)^2}{s^2}\\ &= \frac{4s^2 - 10s + 7}{s^2}\\ &= \frac{7}{s^2} - \frac{10}{s} + 4\\ &= 7\left(\frac{1}{s} - \frac{5}{7}\right)^2 + \frac{3}{7}\end{aligned}$$

よって，$\frac{1}{s} = \frac{5}{7}$ すなわち $t = 2 - \frac{7}{5} = \frac{3}{5}$ $(0 \leqq t < 1$ を満たす$)$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ は

$$\text{最小値 } \sqrt{\frac{3}{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．