点 O を原点とする座標空間において 2 点 A，B の座標を

$$\mathrm{A}(0,\ -3,\ 5),\quad \mathrm{B}(2,\ 0,\ 4)$$

とし，直線 AB と xy 平面との交点を C とする．また，点 D の座標を

$$\mathrm{D}(7,\ 4,\ 5)$$

とする．

直線 AB 上の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表すことにする．

(1) 点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ア}}\,t,\ \boxed{\text{イ}}\,t - \boxed{\text{ウ}},\ -t + \boxed{\text{エ}}\right)$$

と表すことができる．点 C の座標は

$$\mathrm{C}\left(\boxed{\text{オカ}},\ \boxed{\text{キク}},\ 0\right)$$

である．点 C は線分 AB を

$$\boxed{\text{ケ}} : \boxed{\text{コ}}$$

に外分する．ただし，$\boxed{\text{ケ}} : \boxed{\text{コ}}$ は最も簡単な整数の比で答えよ．

(2) $\angle\mathrm{CPD} = 120^\circ$ となるときの点 P の座標について考えよう．

$\angle\mathrm{CPD} = 120^\circ$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}} = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}} |\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}| \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が平行であることから，0 でない実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すことができるので，① は

$$k\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}} = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}} |k\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}| \qquad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}}$ と $|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2$ は，それぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PD}} = -7\left(\boxed{\text{セ}}\,t - \boxed{\text{ソ}}\right)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2 = 14\left(t^2 - \boxed{\text{タ}}\,t + \boxed{\text{チ}}\right)$$

と表される．したがって，② の両辺の 2 乗が等しくなるのは

$$t = \boxed{\text{ツ}},\ \boxed{\text{テ}}$$

のときである．ただし，$\boxed{\text{ツ}} < \boxed{\text{テ}}$ とする．

$t = \boxed{\text{ツ}},\ \boxed{\text{テ}}$ のときの $\angle\mathrm{CPD}$ をそれぞれ調べることで，$\angle\mathrm{CPD} = 120^\circ$ となる点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}},\ \boxed{\text{ニ}}\right)$$

であることがわかる．

(3) 直線 AB から点 A を除いた部分を点 P が動くとき，直線 DP は xy 平面と交わる．この交点を Q とするとき，点 Q が描く図形について考えよう．

点 Q が直線 DP 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{DP}}$$

と表すことができる．さらに，点 Q が xy 平面上にあることから，s は t を用いて表すことができる．よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\boxed{\text{ヌネ}},\ \boxed{\text{ノハ}},\ 0\right) - \frac{\boxed{\text{ヒフ}}}{t}(1,\ 1,\ 0)$$

と表すことができる．

したがって，点 Q はある直線上を動くことがわかる．さらに，t が 0 以外の実数値を変化するとき $\dfrac{1}{t}$ は 0 以外のすべての実数値をとることに注意すると，点 Q が描く図形は直線から 1 点を除いたものであることがわかる．この除かれた点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DR}}$ は $\boxed{\text{ヘ}}$ と平行である．

$\boxed{\text{ヘ}}$ の解答群

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$	① $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$	② $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$	③ $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$
④ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	⑤ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$	⑥ $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$	⑦ $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

(23 共通テスト 追・再試験 IIB 5)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オカ	キク	ケ	コ	サシ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
2	3	3	5	10	12	5	4	−1	2	2	5	5	7	2

テ	ト	ナ	ニ	ヌネ	ノハ	ヒフ	ヘ
3	6	6	2	17	19	35	4

【解答】

(1) P は 2 点 A$(0,\ -3,\ 5)$，B$(2,\ 0,\ 4)$ を結ぶ直線 AB 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (0,\ -3,\ 5) + t(2,\ 3,\ -1)\end{aligned}$$

と表すことができ，このときの点 P の座標は

$$\mathrm{P}(\mathbf{2}t,\ \mathbf{3}t - \mathbf{3},\ -t + \mathbf{5}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．C は直線 AB と xy 平面との交点であるから，P の z 座標が 0，すなわち

$$-t + 5 = 0 \qquad \therefore \quad t = 5$$

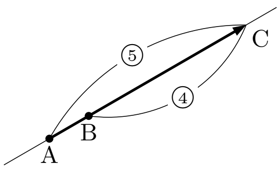
のときの点であり，C の座標は

$$\mathrm{C}(\mathbf{10},\ \mathbf{12},\ 0) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 5\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，点 C は線分 AB を

$$\mathbf{5 : 4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

に外分している．



(2) $\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|\cos 120^\circ=\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}| \quad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つ．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が平行であることから，0 でない実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すことができるので，① は

$$k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=-\frac{1}{2}|k\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}| \quad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる．D の座標は D(7, 4, 5) であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}&=(2,\ 3,\ -1)\cdot(7-2t,\ 7-3t,\ t)\\&=2(7-2t)+3(7-3t)-t\\&=35-14t\\&=-7\,(\mathbf{2}t-\mathbf{5}) \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2&=(7-2t)^2+(7-3t)^2+t^2\\&=(49-28t+4t^2)+(49-42t+9t^2)+t^2\\&=98-70t+14t^2\\&=14\left(t^2-\mathbf{5}t+\mathbf{7}\right) \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

と表されるから，② の両辺の 2 乗が等しくなるのは

$$k^2\{-7(2t-5)\}^2=\frac{1}{4}k^2\{2^2+3^2+(-1)^2\}\times 14(t^2-5t+7)$$

$$49(2t-5)^2=\frac{1}{4}\times 14\times 14(t^2-5t+7) \quad (\because\ k\neq 0)$$

$$4t^2-20t+25=t^2-5t+7$$

$$3t^2-15t+18=0$$

$$3(t-2)(t-3)=0$$

$$\therefore\quad t=\mathbf{2,\ 3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

のときである．

$t=2$ のとき，P(4, 3, 3) であり，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(6,\ 9,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(3,\ 1,\ 2)$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{CPD}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|}=\frac{18+9+6}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|}>0$$

$\angle\mathrm{CPD}$ は鋭角であり不適．

$t=3$ のとき，P(6, 6, 2) であり，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(4,\ 6,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(1,\ -2,\ 3)$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{CPD}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|}=\frac{4-12-6}{\sqrt{16+36+4}\sqrt{1+4+9}}=\frac{-14}{\sqrt{56}\sqrt{14}}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\angle\mathrm{CPD}\leqq 180^\circ$ より，$\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$ である．

よって，$\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$ となる点 P の座標は

$$\mathrm{P}\mathbf{(6,\ 6,\ 2)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 点 Q は直線 DP 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は実数 s を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DP}}\\&=(7,\ 4,\ 5)+s(2t-7,\ 3t-7,\ -t)\\&=(7+s(2t-7),\ 4+s(3t-7),\ 5-st)\end{aligned}$$

と表すことができる．さらに，点 Q が xy 平面上にあることから

$$5-st=0 \qquad \therefore\quad s=\frac{5}{t}$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \left(7+\frac{5(2t-7)}{t},\ 4+\frac{5(3t-7)}{t},\ 5-5\right)\\ &= \left(17-\frac{35}{t},\ 19-\frac{35}{t},\ 0\right)\\ &= (\mathbf{17},\ \mathbf{19},\ 0)-\frac{\mathbf{35}}{t}(1,\ 1,\ 0) \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

と表すことができる．

$\dfrac{1}{t}$ は 0 以外のすべての実数値をとるから，除外点 R は

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (17,\ 19,\ 0)$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DR}} &= (17,\ 19,\ 0)-(7,\ 4,\ 5)\\ &= (10,\ 15,\ -5)\\ &= -5(2,\ 3,\ -1)\\ &= 5\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ と平行である．　(4)　……(答)