空間内に 4 点 A(1, 2, 3)，B(3, 1, 4)，C(2, 7, 1)，D(5, 7, 7) がある．直線 AB 上を点 P が動き，直線 CD 上を点 Q が動く．直線 AB と直線 PQ が垂直であり，かつ直線 CD と直線 PQ が垂直であるとき，点 P の座標は $\boxed{\text{キ}}$ であり，点 Q の座標は $\boxed{\text{ク}}$ である．ただし，答えに分数があらわれるときは，既約分数にせよ．

(23 山梨大 後 医 1(4))

【答】

キ	ク
$\left(-\frac{6}{7},\ \frac{41}{14},\ \frac{29}{14}\right)$	$\left(\frac{13}{7},\ 7,\ \frac{5}{7}\right)$

【解答】

4 点 A(1, 2, 3)，B(3, 1, 4)，C(2, 7, 1)，D(5, 7, 7) の座標から，直線 AB 上を点 P は，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができ，直線 CD 上を点 Q は，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．直線 AB と直線 PQ が垂直であり，かつ直線 CD と直線 PQ が垂直であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = -5 + 12t - 6s$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = -9 + 45t - 12s$$

であり

$$(*) \iff \begin{cases} -6s + 12t = 5 \\ -12s + 45t = 9 \end{cases} \qquad \therefore \quad s = -\frac{13}{14}, \quad t = -\frac{1}{21}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{13}{14}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -12 \\ 41 \\ 29 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 13 \\ 49 \\ 5 \end{pmatrix}$$

よって，点 P，Q の座標は

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}},\ \frac{\mathbf{41}}{\mathbf{14}},\ \frac{\mathbf{29}}{\mathbf{14}}\right), \quad \mathbf{Q}\left(\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{7}},\ \mathbf{7},\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．