座標空間において，3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(1, -1, 0) がある．r を正の実数とし，点 P(a, b, c) が条件 $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=r\mathrm{OP}$ を満たしながら動くとする．以下の問いに答えよ．

(1) $r=1$ のとき，OP が最小になるような a, b, c を求めよ．

(2) $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，a のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の最大値と最小値を求めよ．

(23 岡山大 文系 3)

【答】

(1) $a=1,\ b=0,\ c=0$

(2) $4-2\sqrt{2}\leqq a\leqq 4+2\sqrt{2}$

(3) 最大値 $20+14\sqrt{2}$,　　最小値 $20-14\sqrt{2}$

【解答】

$$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=r\mathrm{OP} \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $r=1$ のとき

$$① \iff \mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2=\mathrm{OP}^2 \iff \begin{cases}\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2 & \cdots\cdots ② \\ \mathrm{AP}^2=\mathrm{OP}^2 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

O(0, 0, 0)，A(1, 1, 0)，B(1, -1, 0)，P(a, b, c) より

$$② \iff (a-1)^2+(b-1)^2+c^2=(a-1)^2+(b+1)^2+c^2$$

$$\therefore\quad (b-1)^2=(b+1)^2$$

$$b^2-2b+1=b^2+2b+1$$

$$\therefore\quad b=0$$

このとき

$$③ \iff (a-1)^2+(0-1)^2+c^2=a^2+0^2+c^2$$

$$\therefore\quad (a-1)^2+1=a^2$$

$$-2a+2=0$$

$$\therefore\quad a=1$$

である．したがって

$$\mathrm{OP}=\sqrt{c^2+1}$$

であり，OP は $c=0$ のとき最小となる．

よって

$$\boldsymbol{a=1,\ b=0,\ c=0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ を満たす点 P は線分 AB の垂直二等分面 (ここでは zx 平面，すなわち平面 $y=0$) を描く．同じく，$\mathrm{AP}=\mathrm{OP}$ より，P は線分 OA の垂直二等分面 (平面 $y=1-x$) 上の点でもある．2 平面 $y=0$，$y=1-x$ の交線は点 (1, 0, 0) を通り z 軸と平行な直線

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 0,\ 1) \quad (t\text{ は実数})\\ &=(1,\ 0,\ t)\end{aligned}$$

である．したがって，OP が最小となるのは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp(0,\ 0,\ 1)$ のときであり

$$(1,\ 0,\ t)\cdot(0,\ 0,\ 1)=0 \qquad \therefore\quad t=0$$

よって，OP が最小となるのは $(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 0)$ のときである．

(2) $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$① \iff \mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2=\frac{3}{4}\mathrm{OP}^2 \iff \begin{cases} b=0 & \cdots\cdots ②' \\ 4\mathrm{AP}^2=3\mathrm{OP}^2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

②$'$ のとき

$$④ \iff 4\{(a-1)^2+(0-1)^2+c^2\}=3\{a^2+0^2+c^2\}$$
$$\therefore\quad 4(a^2-2a+2+c^2)=3(a^2+c^2)$$
$$\therefore\quad c^2=-a^2+8a-8 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$c^2 \geqq 0$ より

$$-a^2+8a-8 \geqq 0$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{4-2\sqrt{2} \leqq a \leqq 4+2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

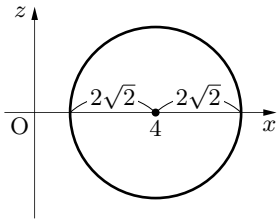
- $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ を満たす点 P は線分 AB の垂直二等分面 (ここでは zx 平面，すなわち平面 $y=0$) を描く．また，$\mathrm{AP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{OP}$ は $\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=2:\sqrt{3}$ であり，P は線分 OA を $2:\sqrt{3}$ に内分する点 $\left(\dfrac{2}{2+\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{2+\sqrt{3}},\ 0\right)$，外分する点 $\left(\dfrac{2}{2-\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{2-\sqrt{3}},\ 0\right)$ を直径の両端とする球面 (アポロニウスの球面) を描く．平面と球面の交線は円である．

$$\begin{cases} y=0 \\ \left(x-\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}\right)\left(x-\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}\right)+\left(y-\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}\right)\left(y-\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}\right)+z^2=0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} y=0 \\ \left\{x^2-\left(\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}\right)x+4\right\}+4+z^2=0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} y=0 \\ x^2-8x+8+z^2=0 \quad (\text{これは⑤である}) \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} y=0 \\ (x-4)^2+z^2=8 \end{cases}$$



これは平面 $y=0$ 上の円であり，右図となる．P の x 座標 a のとりうる値の範囲は

$$4-2\sqrt{2} \leqq a \leqq 4+2\sqrt{2}$$

である．

(3) $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (a,\ 0,\ c)\cdot(a-1,\ -1,\ c) \\ &= a(a-1)+c^2 \\ &= a(a-1)-a^2+8a-8 \quad (\because ⑤) \\ &= 7a-8 \end{aligned}$$

(2) の結果より

$$7(4-2\sqrt{2})-8 \leqq 7a-8 \leqq 7(4+2\sqrt{2})-8$$
$$\therefore\quad 20-14\sqrt{2} \leqq 7a-8 \leqq 20+14\sqrt{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は

最大値 $\boldsymbol{20+14\sqrt{2}}$，　最小値 $\boldsymbol{20-14\sqrt{2}}$ $\cdots\cdots$(答)

をとる．