四面体 OABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の値を求めよ．

(2) 辺 BC の中点を M とするとき，$\cos\angle\mathrm{OMA}$ の値を求めよ．

(3) 3 点 A，B，C の定める平面を α とし，点 O から平面 α に下ろした垂線と平面 α との交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(23 弘前大 人文・教育・医・農 3)

【答】

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}$

(2) $\cos\angle\mathrm{OMA}=-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{4}{7}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

【解答】

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2,$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|.$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$$

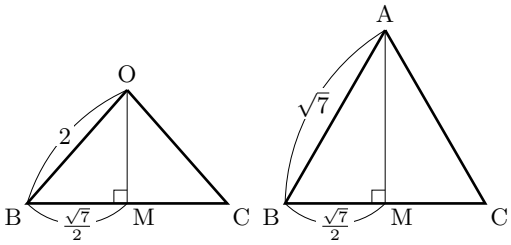
(1) 条件から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=2^2-2\times3+3^2\\&=7\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}}$$ ……(答)

である．

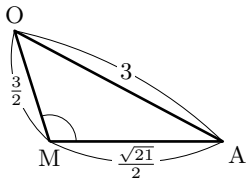
(2) (1) より，三角形 ABC は 1 辺の長さが $\sqrt{7}$ の正三角形である．条件とあわせて



$$\mathrm{OM}=\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{AM}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

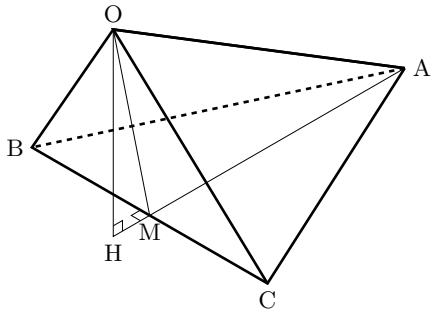
よって，△OMA で余弦定理を用いると



$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{OMA}&=\frac{\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2-\mathrm{OA}^2}{2\times\mathrm{OM}\times\mathrm{AM}}\\&=\frac{\frac{9}{4}+\frac{21}{4}-9}{2\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{2}}\\&=\frac{-6}{6\sqrt{21}}\\&=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{21}}{21}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(3) O から三角形 ABC を含む平面 α に下ろした垂線の足 H から，α 上の直線 BC に下した垂線の足を D とおくと，三垂線の定理より OD $\perp$ BC である．△OBC は二等辺三角形であるから，D は BC の中点 M と一致し，A，M，H はこの順に一直線上に並ぶ．



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{MH}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \frac{|\overrightarrow{\mathrm{MO}}|\cos\angle\mathrm{OMA}}{|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|}\overrightarrow{\mathrm{MA}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \frac{\frac{3}{2}\left(-\frac{\sqrt{21}}{21}\right)}{\frac{\sqrt{21}}{2}}\left(-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \\
&= \frac{8}{7}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{7}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{MO}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ への正射影ベクトルである．
- 実数 s，t を用いて

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}
\end{aligned}
$$

と表すと，OH $\perp$ (平面 α) より

$$
\begin{cases}
\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\
\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0
\end{cases}
$$

である．

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + s|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= 3 - 3^2 + 7s + 7t\cos\frac{\pi}{3} \\
&= -6 + 7s + \frac{7}{2}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\
&= 3 - 3^2 + 7s\cos\frac{\pi}{3} + 7t \quad (\because\ \triangle\mathrm{OAB} \equiv \triangle\mathrm{OAC}\ \text{であり}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 3) \\
&= -6 + \frac{7}{2}s + 7t
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{cases}
-6 + 7s + \frac{7}{2}t = 0 \\
-6 + \frac{7}{2}s + 7t = 0
\end{cases}
\qquad \therefore \quad
\begin{cases}
14s + 7t = 12 \\
7s + 14t = 12
\end{cases}
\qquad \therefore \quad s = t = \frac{4}{7}
$$

となり

$$
\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{4}{7}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})
$$

が得られる．