k を正の実数とし，空間内に点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(4k,\ -4k,\ -4\sqrt{2}k\right)$，$\mathrm{B}\left(7,\ 5,\ -\sqrt{2}\right)$ をとる．点 C は O，A，B を含む平面上の点であり，$\mathrm{OA}=4\mathrm{BC}$ で，四角形 OACB は OA を底辺とする台形であるとする．

(1) $\cos\angle\mathrm{AOB}=$ $\boxed{\text{(ア)}}$ である．台形 OACB の面積を k を用いて表すと $\boxed{\text{(イ)}}$ となる．また，線分 AC の長さを k を用いて表すと $\boxed{\text{(ウ)}}$ となる．

(2) 台形 OACB が円に内接するとき，$k=$ $\boxed{\text{(エ)}}$ である．

(3) $k=$ $\boxed{\text{(エ)}}$ であるとし，直線 OB と直線 AC の交点を D とする．$\triangle\mathrm{OBP}$ と $\triangle\mathrm{ACP}$ の面積が等しい，という条件を満たす空間内の点 P 全体は，点 D を通る 2 つの平面上の点全体から点 D を除いたものとなる．これら 2 つの平面のうち，線分 OA と交わらないものを α とする．点 O から平面 α に下ろした垂線の長さは $\boxed{\text{(オ)}}$ である．

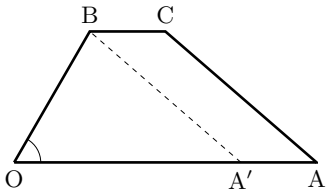
(23 慶應大 理工 2)

【答】

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
$\dfrac{1}{\sqrt{19}}$	$30\sqrt{2}k$	$2\sqrt{9k^2-6k+19}$	$\dfrac{2}{3}$	$8\sqrt{2}$

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(4k,\ -4k,\ -4\sqrt{2}k\right)=4k\left(1,\ -1,\ -\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(7,\ 5,\ -\sqrt{2}\right)$ より



$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$$
$$=\frac{4k(7-5+2)}{4k\sqrt{1+1+2}\sqrt{49+25+2}}\quad(\because\ k>0)$$
$$=\frac{4}{2\times2\sqrt{19}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{19}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．台形 OACB の面積は

$$\frac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{BC})\times\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\mathrm{OA}+\frac{1}{4}\mathrm{OA}\right)\times\mathrm{OB}\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AOB}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{4}\times8k\right)\times2\sqrt{19}\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{19}}\right)^2}$$
$$=10\sqrt{19}k\times\sqrt{\frac{18}{19}}=\boldsymbol{30\sqrt{2}k}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，OA を $3:1$ に内分する点を A' とおくと，$\mathrm{AC}=\mathrm{A}'\mathrm{B}$ であり，余弦定理より

$$\mathrm{AC}=\mathrm{A}'\mathrm{B}=\sqrt{\mathrm{OA}'^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}'\times\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\times8k\right)^2+(2\sqrt{19})^2-2\times\left(\frac{3}{4}\times8k\right)\times2\sqrt{19}\times\frac{1}{\sqrt{19}}}$$
$$=\sqrt{36k^2+(4\times19)-24k}$$
$$=\boldsymbol{2\sqrt{9k^2-6k+19}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(7,\ 5,\ -\sqrt{2}\right) + k\left(1,\ -1,\ -\sqrt{2}\right)$$

  より

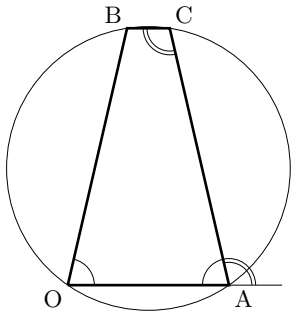
  $$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(7-3k,\ 5+3k,\ -\sqrt{2}+3\sqrt{2}k\right)$$

  であるから

  $$\begin{aligned}\mathrm{AC} &= \sqrt{(7-3k)^2+(5+3k)^2+(-\sqrt{2}+3\sqrt{2}k)^2}\\ &= \sqrt{36k^2-24k+76}\\ &= 2\sqrt{9k^2-6k+19}\end{aligned}$$

  である．

(2) 台形 OACB が円に内接するとき



$$\angle\mathrm{AOB} + \angle\mathrm{ACB} = \pi$$

であり，OA // BC より

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{OAC} &= \pi - (\text{頂点 A の外角})\\ &= \pi - \angle\mathrm{ACB}\\ &= \angle\mathrm{AOB}\end{aligned}$$

である．よって，台形 OACB は AC = OB の等脚台形であり

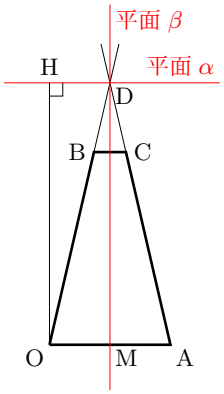
$$\begin{aligned}&2\sqrt{9k^2-6k+19} = 2\sqrt{19}\\ &9k^2-6k+19 = 19\\ &3k(3k-2) = 0\end{aligned}$$

$k > 0$ より

$$k = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$ ……(答)

である．

(3) $k = \dfrac{2}{3}$ のとき，OB = AC であるから，△OBP と △ACP の面積が等しいという条件を満たす空間内の点 P は，2 直線 OB，AC までの距離が等しい点である．



直線 OB と直線 AC の交点を D とすると，このような点 P の全体は，△DBC の頂点 D の内角，外角の二等分線を含み，△DBC と垂直な 2 つの平面となる．ただし，点 D は除く．

これら 2 つの平面のうち，線分 OA と交わらないものを α，他方を β とし，点 O から平面 α に下ろした垂線の足を H，OA の中点を M とおくと，求める長さ OH は

$$\mathrm{OH} = \mathrm{DM} = \mathrm{OM}\tan\angle\mathrm{MOD}$$

である．ここで

$$\mathrm{OM} = \frac{\mathrm{OA}}{2} = \frac{8k}{2} = 4\times\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\tan\angle\mathrm{MOD} = \tan\angle\mathrm{AOB} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\angle\mathrm{AOB}} - 1} = \sqrt{19-1} = 3\sqrt{2}$$

であるから

$$\mathrm{OH} = \frac{8}{3}\times 3\sqrt{2} = \boldsymbol{8\sqrt{2}}$$ ……(答)

である．