p は実数とする．O を原点とする座標空間に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，P$(p,\ -p+3,\ 5)$ があり，次の 3 つの条件を満たす点 C がある．

(条件 1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$
(条件 2) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-1$
(条件 3) 平面 ABC はベクトル $\vec{v}=(2,\ 2,\ 1)$ に垂直である．

点 P から平面 ABC に垂線 PQ を下ろす．次の問いに答えよ．

(1) 点 C の座標を求めよ．
(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を成分で表せ．
(3) 四面体 ABCP の体積を求めよ．
(4) △BCP の面積の最小値を求めよ．また，最小値をとるときの p の値を求めよ．

(23 東京農工大 後 工 1)

【答】

(1) C$(0,\ -1,\ 4)$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-2,\ -2,\ -1)$
(3) 3
(4) $p=2$ のとき，最小値 $3\sqrt{5}$

【解答】

(1) 点 C の座標を $(x,\ y,\ z)$ とおく．(条件 1)，(条件 2) より

$$\begin{cases}(1,\ 0,\ 0)\cdot(x,\ y,\ z)=0\\(0,\ 1,\ 0)\cdot(x,\ y,\ z)=-1\end{cases}\qquad\therefore\quad x=0,\ y=-1$$

$$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(0,\ -1,\ z)$$

さらに，(条件 3) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{v}=0$$

が必要であり

$$(-1,\ -1,\ z)\cdot(2,\ 2,\ 1)=0\qquad\therefore\quad -2-2+z=0\qquad\therefore\quad z=4$$

すなわち，点 C の座標は $(0,\ -1,\ 4)$ であることが必要である．

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ -1,\ 4)$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，平面 ABC は存在し，さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{v}=0$ であるから (条件 C) は成り立つ．

以上より，点 C の座標は

$$\mathbf{C(0,\ -1,\ 4)}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 直線 PQ は平面 ABC に垂直であるから，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\&=(p-1,\ -p+3,\ 5)+k(2,\ 2,\ 1)\end{aligned}$$

と表すことができる．さらに，Q は平面 ABC 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} \perp \vec{v}$ であり

$$\begin{aligned}
&\{(p-1,\ -p+3,\ 5)+k(2,\ 2,\ 1)\}\cdot(2,\ 2,\ 1)=0\\
&2(p-1)+2(-p+3)+5+k(4+4+1)=0\\
&9k+9=0\\
\therefore\quad &k=-1
\end{aligned}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-(2,\ 2,\ 1)=\boldsymbol{(-2,\ -2,\ -1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ -1,\ 4)$ より

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{2\times18-0^2}\\
&=3
\end{aligned}$$

また，(2) の結果より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{4+4+1}=3$$

であるから，四面体 ABCP の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\times|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{1}{3}\times3\times3=\boldsymbol{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ -2,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(p,\ -p+2,\ 5)$ より

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{BCP}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}})^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(0+4+16)(p^2+(-p+2)^2+25)-(0+(2p-4)+20)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{20(2p^2-4p+29)-(2p+16)^2}\\
&=\sqrt{5(2p^2-4p+29)-(p+8)^2}\\
&=\sqrt{9p^2-36p+81}\\
&=\sqrt{9(p^2-4p+9)}\\
&=3\sqrt{(p-2)^2+5}
\end{aligned}$$

であり，△BCP の面積は

$$\boldsymbol{p=2}\ \textbf{のとき，最小値}\ \boldsymbol{3\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．