四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，次が成り立つとする．

$$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ,\quad |\vec{a}|=2,\quad |\vec{b}|=3,\quad |\vec{c}|=\sqrt{6},\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=3$$

ただし $\vec{b}\cdot\vec{c}$ は，2 つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を表す．さらに，線分 OC と線分 AB は垂直であるとする．点 C から 3 点 O，A，B を含む平面に下ろした垂線を CH とし，点 O から 3 点 A，B，C を含む平面に下ろした垂線を OK とする．

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．
(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．
(3) ベクトル $\vec{c}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ は平行であることを示せ．

(23 東北大 理系 5)

【答】
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=3$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{9}\vec{b}$
(3) 略

【解答】
(1) 与えられた条件より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=2\times3\times\cos60^\circ=\mathbf{3}$$ ……(答)

である．また，線分 OC と線分 AB は垂直であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=3-\vec{c}\cdot\vec{a}$$

であるから

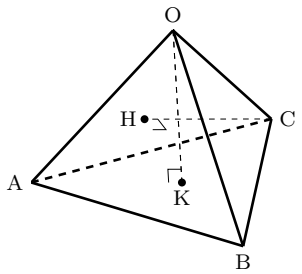
$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\mathbf{3}$$ ……(答)

である．

(2) H は平面 OAB 上の点であるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

と表すことができる．CH ⊥ 平面 OAB より



$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{0}\\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0\\ (s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4s+3t-3=0\\ 3s+9t-3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4s+3t=3\\ s+3t=1\end{cases}$$

$$\therefore\quad s=\frac{2}{3},\quad t=\frac{1}{9}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}}$$ ……(答)

である．

(3) K は平面 ABC 上の点であるから，実数 $p,\ q,\ r$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}, \quad p+q+r=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．OK ⊥ 平面 ABC より

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathrm{OK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \\ (p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-4)p + (9-3)q + (3-3)r = 0 \\ (3-4)p + (3-3)q + (6-3)r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 6q \\ p = 3r \end{cases}$$

①とあわせると

$$p = \frac{2}{3},\ q = \frac{1}{9},\ r = \frac{2}{9}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

である．これにより

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{HK}} &= \overrightarrow{\mathrm{OK}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}\right) - \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}\right) \\ &= \frac{2}{9}\vec{c} \end{aligned}$$

である．すなわち，$\vec{c} \parallel \overrightarrow{\mathrm{HK}}$ である． ……(証明終わり)