空間内に 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) をとる．時刻 $t=0$ から $t=1$ まで 3 点 P，Q，R は次のように動くものとする．

- $t=0$ に 3 点は点 O を出発する．
- 動点 P は線分 OA 上を速さ 1 で点 A に向かって動く．
- 動点 Q は線分 OB 上を速さ $\dfrac{1}{2}$ で点 B に向かって動く．
- 動点 R は線分 OC 上を速さ 2 で動く．$t=\dfrac{1}{2}$ までは点 C に向かって動き，$t=\dfrac{1}{2}$ 以後は点 C から点 O に向かって動く．

時刻 t おける三角形 PQR の面積を $S(t)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $S(t)$ を求めよ．
(2) $S(t)$ を最大にする t の値を求めよ．

(23 琉球大 工・医・理・教育 3)

【答】

(1) $S(t)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{21}}{4}t^2 & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right) \\ \dfrac{t}{4}\sqrt{21t^2-40t+20} & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$

(2) $t=\dfrac{15-\sqrt{15}}{21}$

【解答】

(1) 時刻 t における P，Q，R の座標は

$$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{t}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{R}\begin{cases} (0,\ 0,\ 2t) & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\text{のとき}\right) \\ (0,\ 0,\ 2-2t) & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

である．△PQR の面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}$$

である．

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(-t,\ \frac{t}{2},\ 0\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{cases} (-t,\ 0,\ 2t) & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\text{のとき}\right) \\ (-t,\ 0,\ 2-2t) & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

であるから

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{\left(t^2+\frac{t^2}{4}\right)(t^2+4t^2)-(t^2)^2}=\frac{\sqrt{21}}{4}t^2$$

$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(t)&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(t^2+\frac{t^2}{4}\right)\{t^2+4(1-t)^2\}-(t^2)^2} \\ &=\frac{t}{2}\sqrt{\frac{5}{4}(5t^2-8t+4)-t^2}=\frac{t}{4}\sqrt{21t^2-40t+20} \end{aligned}$$

すなわち

$$\boldsymbol{S(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{21}}{4}t^2 & \left(0\leqq t\leqq \dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\right)\\ \dfrac{t}{4}\sqrt{21t^2-40t+20} & \left(\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1\ \text{のとき}\right)\end{cases}}$$ ……(答)

である．

(2) (1) の結果より

(i) $0\leqq t\leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$S(t)=\dfrac{\sqrt{21}}{4}t^2$ は増加関数であり，この範囲での最大値は $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{21}}{16}$ である．

(ii) $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき

$S(t)=\dfrac{1}{4}\sqrt{t^2(21t^2-40t+20)}$ なので，$f(t)=t^2(21t^2-40t+20)$ とおくと，$S(t)$ が最大となるのは $f(t)$ が最大となるときと一致する．

$$\begin{aligned}f'(t)&=84t^3-120t^2+40t\\&=4t(21t^2-30t+10)\end{aligned}$$

であり，$f'(t)=0$ となるのは $t=0,\ \dfrac{15\pm\sqrt{15}}{21}$ のときである．$\sqrt{15}<4$ より，

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{15-\sqrt{15}}{21}<\dfrac{15+\sqrt{15}}{21}<1$ であるから，(ii) の範囲での $S(t)$ の増減は下表となる．

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{15-\sqrt{15}}{21}$	$\cdots$	$\frac{15+\sqrt{15}}{21}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{\sqrt{21}}{16}$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

$S\left(\dfrac{1}{2}\right)>S(1)$ より，(ii) の範囲で $S(t)$ が最大となるのは $t=\dfrac{15-\sqrt{15}}{21}$ のときである．

(i)，(ii) での最大値を比較すると

$$S\left(\frac{1}{2}\right)<S\left(\frac{15-\sqrt{15}}{21}\right)$$

であるから，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲で $S(t)$ を最大にする t の値は

$$\boldsymbol{t=\frac{15-\sqrt{15}}{21}}$$ ……(答)

である．