底面が平行四辺形 OABC である四角錐 D − OABC を考え，点 X を線分 BD を 2 : 1 に内分する点，点 P を線分 AD 上の点，点 Q を線分 CD 上の点とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ として，以下の問に答えよ．

(1) △ACD を含む平面と直線 OX との交点を Y とする．$\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) $s = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}$ とする．4 点 O，X，P，Q が同一平面上にあるとき，s のとりうる値の範囲を求めよ．ただし点 A と点 P が一致するときは AP = 0 とする．

(3) 底面 OABC が正方形であり，四角錐 D − OABC のすべての辺の長さが 1 である場合に，(2) の条件のもとで △DPQ の面積の最小値を求めよ．

(23 群馬大 医 3)

【答】

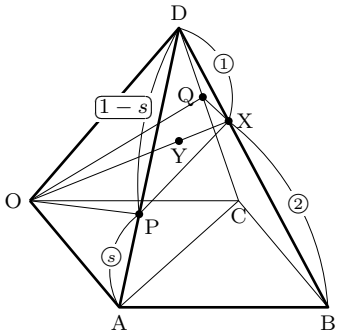
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{c} + \dfrac{1}{2}\vec{d}$

(2) $0 \leqq s \leqq \dfrac{2}{3}$

(3) $\dfrac{1}{8}$

【解答】

(1) 点 X は線分 BD を 2 : 1 に内分する点であり，底面 OABC は平行四辺形であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}\\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{c}) + \frac{2}{3}\vec{d}\\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{d}\end{aligned}$$

点 Y は線分 OX 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OY}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OX}}\\ &= \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{c} + \frac{2k}{3}\vec{d}\end{aligned}$$

と表すことができ，さらに，点 Y は △ACD を含む平面上にあるので

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{2k}{3} = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{3}{4}$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $s = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}$ より点 P は線分 AD を $s : (1-s)$ $(0 \leqq s \leqq 1)$ に内分する点である．

Q は平面 OPX 上の点であるから，実数 α，β を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OX}}\\ &= \alpha\{(1-s)\vec{a} + s\vec{d}\} + \beta\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{d}\right)\\ &= \left\{\alpha(1-s) + \frac{\beta}{3}\right\}\vec{a} + \frac{\beta}{3}\vec{c} + \left(\alpha s + \frac{2\beta}{3}\right)\vec{d}\end{aligned}$$

と表すことができ，さらに，Q は線分 CD 上の点でもあるから，実数 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (1-t)\vec{c} + t\vec{d}$$

と表すこともできる．$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ は 1 次独立より

$$(*)\begin{cases} \alpha(1-s) + \dfrac{\beta}{3} = 0 \\ \dfrac{\beta}{3} = 1-t \\ \alpha s + \dfrac{2\beta}{3} = t \end{cases}$$

が成り立ち，$(*)$ を変形すると

$$(*) \iff \begin{cases} \dfrac{\beta}{3} = \alpha(s-1) \\ \alpha(s-1) = 1-t \\ \alpha s + 2\alpha(s-1) = t \end{cases}$$

となる．

(i) $s-1=0$ $(s=1)$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} \dfrac{\beta}{3} = 0 \\ 0 = 1-t \\ \alpha + 0 = t \end{cases} \qquad \therefore \quad \beta = 0,\ t = 1,\ \alpha = 1$$

すなわち，P，Q が D と一致するときであり，不適．

- 4 点 O，X，P，Q は異なるものとして問題を解釈した．P と Q が一致する場合も認めるならば，4 点 O，X，P，Q は △OXD を含む平面上にあるので，$s=1$ も求める範囲に含めることになる．

(ii) $s-1 \neq 0$ $(s \neq 1)$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} \dfrac{\beta}{3} = \alpha(s-1) & \cdots\cdots ① \\ \alpha = \dfrac{1-t}{s-1} & \cdots\cdots ② \\ \dfrac{(1-t)s}{s-1} + 2(1-t) = t & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③ を満たす s，t が $0 \leqq s < 1$，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に存在すれば，①，② により α，β が決まる．③ を満たす t が $0 \leqq t \leqq 1$ に存在するための s $(0 \leqq s < 1)$ の条件を求める．$s \neq 1$ より

$$③ \iff (1-t)s + (2-3t)(s-1) = 0$$
$$\therefore \quad 3s - 2 - (4s-3)t = 0$$

$4s-3 \neq 0$ が確認されるから

$$t = \frac{3s-2}{4s-3} \qquad \cdots\cdots ④$$

であり，$0 \leqq t \leqq 1$ であるための s の条件は

$$0 \leqq \frac{3s-2}{4s-3} \leqq 1 \iff \begin{cases} 0 \leqq \dfrac{3s-2}{4s-3} \\ \dfrac{1-s}{4s-3} \leqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s \leqq \dfrac{2}{3} \text{ または } \dfrac{3}{4} < s \\ s < \dfrac{3}{4} \text{ または } 1 \leqq s \end{cases}$$
$$\iff s \leqq \frac{2}{3} \text{ または } 1 \leqq s$$

である．$0 \leqq s < 1$ とあわせると

$$0 \leqq s \leqq \frac{2}{3}$$

である．

(i)，(ii) より，s のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq s \leqq \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 四角錐 D–OABC は底面 OABC が正方形で，すべての辺の長さが 1 であるから，△ACD は $\mathrm{DA} = \mathrm{DC} = 1$，$\mathrm{AC} = \sqrt{2}$ の直角二等辺三角形であり，$\angle\mathrm{ADC} = 90^\circ$ である．(2) での s，t を用いると △DPQ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PD}}||\overrightarrow{\mathrm{QD}}| = \frac{1}{2}|(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}}||(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CD}}| = \frac{1}{2}(1-s)(1-t) \\ &= \frac{1}{2}(1-s)\left(1 - \frac{3s-2}{4s-3}\right) \quad (\because\ ④) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(1-s)^2}{3-4s} \end{aligned}$$

$u = 3 - 4s$ とおくと

$$S = \frac{1}{2}\frac{\left(1 - \frac{3-u}{4}\right)^2}{u} = \frac{(1+u)^2}{32u} = \frac{1+2u+u^2}{32u} = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{u} + 2 + u\right)$$

である．ここで，u の動く範囲は

$$⑤ \iff 0 \leqq \frac{3-u}{4} \leqq \frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3} \leqq u \leqq 3$$

であるから，相加平均・相乗平均の関係より

$$S \geqq \frac{1}{32}\left(2 + 2\sqrt{\frac{1}{u}\cdot u}\right) = \frac{1}{32}(2+2) = \frac{1}{8}$$

である．等号は $\dfrac{1}{u} = u$，すなわち $u = 1$ $\left(s = \dfrac{1}{2}\right)$ のとき成立する．

よって，S の最小値は

$$\boldsymbol{\frac{1}{8}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．