t を正の実数とする．四面体 OABC において，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=t,\ \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=2$$

とする．△ABC の重心を G とする．辺 AB の中点を M とし，点 M から直線 OC に下ろした垂線と直線 OC との交点を N とする．s を実数とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$$

とおく．以下の各問に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ t を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ を t を用いて表せ．また，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) s を t を用いて表せ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$ となる t の値を求めよ．

(4) t が (2) の範囲を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|+|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|$ の最大値を求めよ．

(23 茨城大 理 2)

【答】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=t^2-4$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\sqrt{t^2-\dfrac{4}{3}}$，$t>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

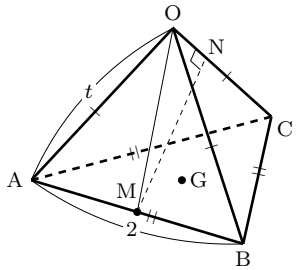
(3) $s=\dfrac{t^2-2}{t^2}$，$t=\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{6}$

【解答】

(1) $\mathrm{AB}=2,\ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=t$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=2^2$$
$$t^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2=4$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=t^2-2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$



$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=2,\ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OV}=t$ であるから，同様にして

$$\boldsymbol{\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}\cdot=t^2-2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

を得る．

(2) G は △ABC の重心であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|&=\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|\\&=\frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}}\\&=\frac{1}{3}\sqrt{3t^2+6(t^2-2)}\\&=\boldsymbol{\sqrt{t^2-\frac{4}{3}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．t のとり得る値の範囲は

$$\begin{cases}t>0\\|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|>0\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}t>0\\t^2-\dfrac{4}{3}>0\end{cases}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{t>\frac{2\sqrt{3}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = s\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MN}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MN}} = 0$ …… ① である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \vec{c} \cdot \left(s\vec{c} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) \\ &= s|\vec{c}|^2 - \frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}) \\ &= st^2 - (t^2-2)\end{aligned}$$

であるから，① より

$$\therefore \quad \boldsymbol{s = \frac{t^2-2}{t^2}} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}| = |\overrightarrow{\mathrm{MN}}|$ …… ③ となる t の値を求める．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2 &= \left|s\vec{c} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2 \\ &= s^2|\vec{c}|^2 - 2s\vec{c}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}|^2 \\ &= s^2t^2 - 2s(t^2-2) + \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2) \\ &= \frac{(t^2-2)^2}{t^2} - 2\frac{(t^2-2)^2}{t^2} + \frac{1}{4}(2t^2 + 2(t^2-2)) \quad (\because ②) \\ &= -\frac{(t^2-2)^2}{t^2} + t^2 - 1 \\ &= \frac{3t^2-4}{t^2}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&③ \iff t^2 - \frac{4}{3} = \frac{3t^2-4}{t^2} \\ &3t^4 - 4t^2 = 9t^2 - 12 \\ &3t^4 - 13t^2 + 12 = 0 \\ &(3t^2-4)(t^2-3) = 0\end{aligned}$$

$t^2 > \dfrac{4}{3}$ より

$$t^2 = 3 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{t = \sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $\triangle\mathrm{OMN}$ は $\angle\mathrm{ONM} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{ON}}|^2 \\ &= (|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2) - |\overrightarrow{\mathrm{ON}}|^2 \quad (\because \triangle\mathrm{OAM} \text{ は} \angle\mathrm{OMA} = \tfrac{\pi}{2} \text{の直角三角形}) \\ &= (t^2-1) - s^2t^2 \\ &= (t^2-1) - \frac{(t^2-2)^2}{t^4}\cdot t^2 \quad (\because ②) \\ &= \frac{3t^2-4}{t^2}\end{aligned}$$

である．

(4) $$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|+|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|=\sqrt{\frac{3t^2-4}{t^2}}+|1-s|t$$

ここで，$1-s=1-\dfrac{t^2-2}{t^2}=\dfrac{2}{t^2}>0$ なので

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|+|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|&=\sqrt{\frac{3t^2-4}{t^2}}+\frac{2}{t^2}t\\&=\frac{\sqrt{3t^2-4}+2}{t}\quad(\because\ t>0)\end{aligned}$$

$f(t)=\dfrac{\sqrt{3t^2-4}+2}{t}$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{\dfrac{6t}{2\sqrt{3t^2-4}}t-(\sqrt{3t^2-4}+2)}{t^2}\\&=\frac{3t^2-(3t^2-4+2\sqrt{3t^2-4})}{t^2\sqrt{3t^2-4}}\\&=\frac{2(2-\sqrt{3t^2-4})}{t^2\sqrt{3t^2-4}}\end{aligned}$$

$f'(t)$ の符号は $2-\sqrt{3t^2-4}$ の符号と一致する．

$$2-\sqrt{3t^2-4}=\frac{4-(3t^2-4)}{2+\sqrt{3t^2-4}}=\frac{8-3t^2}{2+\sqrt{3t^2-4}}$$

$t>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ における $f(t)$ の増減は下表となる．

t	$\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\cdots$	$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|+|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|$ は $t=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ で

$$\text{最大値 } f\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3\cdot\dfrac{8}{3}-4}+2}{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{3\cdot4}{2\sqrt{6}}=\boldsymbol{\sqrt{6}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．