座標空間内の 3 点 A$(6,\ -2,\ 9)$，B$(4,\ -6,\ 3)$，C$(3,\ -1,\ 7)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\triangle$ABC は直角三角形であることを示せ．

(2) 3 点 A，B，C は，平面 ABC 上のある正六角形の頂点である．この正六角形の，A，B，C 以外の 3 つの頂点の座標をすべて求めよ．

(23 岩手大 教育・理工・農 3)

【答】

(1) 略

(2) $(2,\ -3,\ 4), (7,\ -7,\ 5), (8,\ -5,\ 8)$

【解答】

$$\mathrm{A}(6,\ -2,\ 9),\ \mathrm{B}(4,\ -6,\ 3),\ \mathrm{C}(3,\ -1,\ 7)$$

(1) $\triangle$ABC の各辺の長さの 2 乗をそれぞれ計算する．

$$\mathrm{AB}^2=(6-4)^2+(-2-(-6))^2+(9-3)^2=4+16+36=56,$$
$$\mathrm{BC}^2=(4-3)^2+(-6-(-1))^2+(3-7)^2=1+25+16=42,$$
$$\mathrm{CA}^2=(3-6)^2+(-1-(-2))^2+(7-9)^2=9+1+4=14$$

$\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2$ であるから，$\triangle$ABC は直角三角形である． ……(証明終わり)

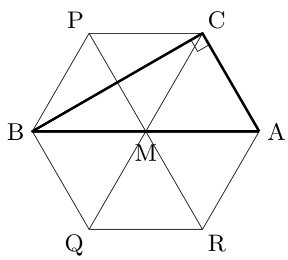
(2) (1) より，$\triangle$ABC の各辺の長さの比は

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CA}=2\sqrt{14}:\sqrt{3\cdot 14}:\sqrt{14}$$
$$=2:\sqrt{3}:1$$

であり，直角三角形 ABC の各内角は

$$\angle\mathrm{A}=60^\circ,\ \angle\mathrm{B}=30^\circ,\ \angle\mathrm{C}=90^\circ$$

である．



3 点 A，B，C を 3 つの頂点とする正六角形において，残りの頂点を右図のように P，Q，R とする．座標空間の原点を O，線分 AB の中点 (正六角形の中心) を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$=\frac{1}{2}\{(6,\ -2,\ 9)+(4,\ -6,\ 3)\}$$
$$=(5,\ -4,\ 6)$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(5,\ -4,\ 6)+(-3,\ 1,\ -2)=(2,\ -3,\ 4)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(4,\ -6,\ 3)+(3,\ -1,\ 2)=(7,\ -7,\ 5)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(5,\ -4,\ 6)+(3,\ -1,\ 2)=(8,\ -5,\ 8)$$

よって，求める 3 点の座標は，

$$\mathbf{(2,\ -3,\ 4),\ (7,\ -7,\ 5),\ (8,\ -5,\ 8)}$$ ……(答)

である．