定数 s を用いて空間内に 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(40,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ s,\ 0),\ \mathrm{H}(40,\ 30,\ 120)$$

が与えられている．$\angle\mathrm{AHB} = 90^\circ$ のとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 線分 OH の長さを求めなさい．
(2) 定数 s の値を求めなさい．
(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ とする．このとき，$\angle\mathrm{BHP} = 90^\circ$ をみたす点 P の軌跡が表す方程式を求めなさい．

(23 福島大 食農 3)

【答】

(1) $\mathrm{OH} = 130$
(2) $s = 510$
(3) $x - 12y - 40 = 0,\ z = 0$

【解答】

(1) $\mathrm{H}(40,\ 30,\ 120)$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{OH} &= \sqrt{40^2 + 30^2 + 120^2} = 10\sqrt{16 + 9 + 144}\\ &= 10\sqrt{169} = \mathbf{130}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) $\angle\mathrm{AHB} = 90^\circ$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}} = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．$\overrightarrow{\mathrm{HA}} = (0,\ -30,\ -120)$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = (-40,\ s-30,\ -120)$ なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}} &= 0 - 30(s-30) + 120^2\\ &= -30(s - 30 - 120 \cdot 4)\\ &= -30(s - 510)\end{aligned}$$

したがって，① を満たす s は

$$\boldsymbol{s = 510}$$ ……(答)

である．

(3) $\angle\mathrm{BHP} = 90^\circ$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}} = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

である．(2) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}} = (-40,\ 480,\ -120) = -40(1,\ -12,\ 3)$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}} = (x-40,\ y-30,\ -120)$$

なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}} &= -40\{(x-40) - 12(y-30) - 360\}\\ &= -40(x - 12y - 40)\end{aligned}$$

② に代入すると，xy 平面上の点 P の軌跡が表す方程式として

$$\boldsymbol{x - 12y - 40 = 0,\ z = 0}$$ ……(答)

が得られる．