座標空間において，平面 $z=2$ 上の点 P と，平面 $z=1$ 上の円板

$$B: x^2+y^2 \leqq 1, \quad z=1$$

を考える．点 Q は平面 $z=0$ (xy 平面) 上にあるとし，与えられた P に対して，線分 PQ と B が共有点をもつような Q 全体からなる図形を D とする．次の問いに答えよ．

(1) P の座標が $(0,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ．
(2) r を正の定数とする．P の座標が $(r,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ．
(3) $r>2$ を満たす定数 r に対して，平面 $z=2$ 上の円

$$C: x^2+y^2=r^2, \quad z=2$$

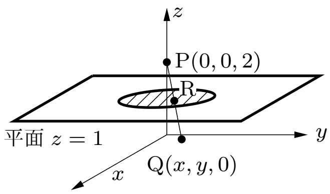
を考える．P が C 上を動くとき，D が通過する部分の面積を求めよ．

(23 金沢大 理系 2)

【答】

(1) 半径 2 で中心 $(0,\ 0,\ 0)$ の円板
(2) 半径 2 で中心 $(-r,\ 0,\ 0)$ の円板
(3) $8\pi r$

【解答】



(1) P の座標は $(0,\ 0,\ 2)$ である．xy 平面上の点 Q の座標を $(x,\ y,\ 0)$，線分 PQ と平面 $z=1$ の共有点を R とおく．R は線分 PQ の中点であり，座標は

$$\mathrm{R}\left(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2},\ 1\right)$$

となる．線分 PQ と円板 B が共有点をもつから，$\mathrm{R}(X,\ Y,\ 1)$ は

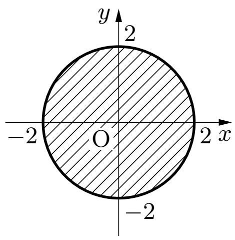
$$X^2+Y^2 \leqq 1, \quad Z=1$$

を満たす．すなわち，$x,\ y$ は

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leqq 1$$

$$\therefore \quad x^2+y^2 \leqq 4$$

を満たす．



よって，D は中心 $(0,\ 0,\ 0)$，半径 2 の円の周および内部であり，xy 平面上に図示すると右図の斜線部分となる．

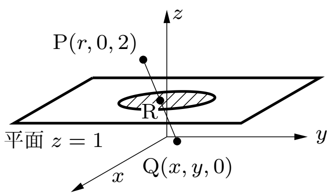
(2) P の座標は $(r,\ 0,\ 2)$ であるとき，Q の座標 $(x,\ y,\ 0)$ に対する R の座標は

$$\left(\frac{x+r}{2},\ \frac{y}{2},\ 1\right)$$

となる．$\mathrm{R}(X,\ Y,\ 1)$ は

$$X^2+Y^2 \leqq 1, \quad Z=1$$

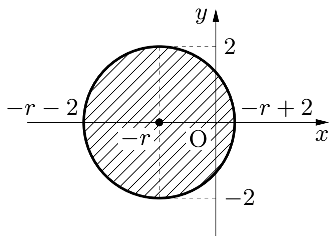
を満たすから，xy 平面上で $x,\ y$ は



$$\left(\frac{x+r}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leqq 1$$
$$\therefore \quad (x+r)^2+y^2 \leqq 4$$

を満たす．

よって D は中心 $(-r,\ 0,\ 0)$，半径 2 の円の周および内部であり，xy 平面上に図示すると右図の斜線部分となる．



(3) P は円

$$x^2+y^2=r^2, \quad z=2$$

上を動くから，P の座標を

$$(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 2) \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおくことができる．$\mathrm{Q}(x,\ y,\ 0)$ に対する R の座標は

$$\mathrm{R}\left(\frac{x+r\cos\theta}{2},\ \frac{y+r\sin\theta}{2},\ 1\right)$$

となる．$\mathrm{R}(X,\ Y,\ 1)$ は

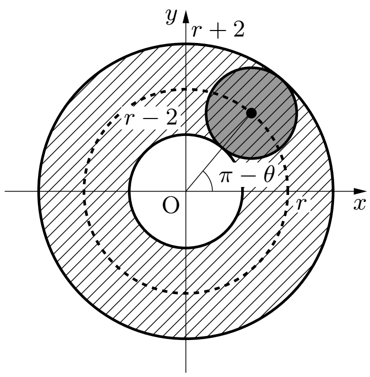
$$X^2+Y^2 \leqq 1, \quad Z=1$$

を満たすから，xy 平面上で $(x,\ y)$ は

$$\left(\frac{x+r\cos\theta}{2}\right)^2+\left(\frac{y+r\sin\theta}{2}\right)^2 \leqq 1$$
$$\therefore \quad (x+r\cos\theta)^2+(y+r\sin\theta)^2 \leqq 4$$

を満たす．

θ を固定したとき，点 $(x,\ y)$ は点 $(-r\cos\theta,\ -r\sin\theta)$，すなわち，$(r\cos(\pi-\theta),\ r\sin(\pi-\theta))$ を中心とする半径 2 の円の周および内部 (黒塗り部分) を動く．



ついで，θ を動かすと，中心は原点を中心とする半径 r の円を描くから，D が通過する部分は右図の斜線部分である．

外側の円の半径は $r+2$，内側の円の半径は $r-2$ なので，求める部分の面積は

$$\pi(r+2)^2-\pi(r-2)^2=\boldsymbol{8\pi r} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．