半径が 5 である球 S がある．この球面上に 3 点 P，Q，R をとったとき，これらの 3 点を通る平面 α 上で $\mathrm{PQ}=8,\ \mathrm{QR}=5,\ \mathrm{RP}=9$ であったとする．

球 S の球面上に点 T を三角錐(すい)TPQR の体積が最大となるようにとるとき，その体積を求めよう．

まず，$\cos\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であることから，△PQR の面積は $\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}$ である．

次に，点 T から平面 α に垂直な直線を引き，平面 α との交点を H とする．このとき，PH，QH，RH の長さについて，$\boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ．

以上より，三角錐 TPQR の体積は $\boxed{\text{ニヌ}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}\right)$ である．

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ $\mathrm{PH}<\mathrm{QH}<\mathrm{RH}$	① $\mathrm{PH}<\mathrm{RH}<\mathrm{QH}$
② $\mathrm{QH}<\mathrm{PH}<\mathrm{RH}$	③ $\mathrm{QH}<\mathrm{RH}<\mathrm{PH}$
④ $\mathrm{RH}<\mathrm{PH}<\mathrm{QH}$	⑤ $\mathrm{RH}<\mathrm{QH}<\mathrm{PH}$
⑥ $\mathrm{PH}=\mathrm{QH}=\mathrm{RH}$	

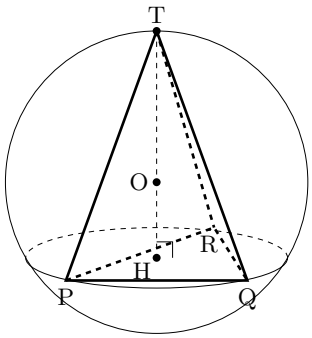
(23 共通テスト 本試験 I[2](2)・IA1[2](2))

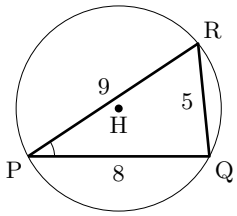
【答】

タ	チ	ツ	テト	ナ	ニヌ	ネノ	ハ
5	6	6	11	6	10	11	2

【解答】

三角錐 TPQR の体積が最大となるのは，△PQR は固定されているから，T から平面 α に下ろした垂線の足を H とすると，TH が最大となるときであり，それは T，O，H がこの順に一直線上に並ぶときである．





まず，△PQR において余弦定理を用いると

$$\cos\angle\mathrm{QPR}=\frac{8^2+9^2-5^2}{2\cdot8\cdot9}=\frac{120}{2\cdot8\cdot9}=\boldsymbol{\frac{5}{6}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

であることから

$$\sin\angle\mathrm{QPR}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{36-25}}{6}=\frac{\sqrt{11}}{6}$$

であり，△PQR の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}\sin\angle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}=\boldsymbol{6\sqrt{11}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 面積だけならヘロンの公式を用いてもよい．

$$\frac{\mathrm{PQ}+\mathrm{QR}+\mathrm{RP}}{2}=\frac{8+5+9}{2}=11$$

より，△PQR の面積は

$$\sqrt{11(11-8)(11-5)(11-9)}=\sqrt{11\cdot 3\cdot 6\cdot 2}=6\sqrt{11}$$

である．

次に，T，O，H がこの順に一直線上に並んでおり，OP = OQ = OR であるから

$$\mathbf{PH=QH=RH} \qquad ⑥ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が成り立つ．

H は △PQR の外心であるから，正弦定理より

$$\mathrm{PH}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{QR}}{\sin\angle\mathrm{QPR}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{\frac{\sqrt{11}}{6}}=\frac{15}{\sqrt{11}}$$

$$\mathrm{TH}=\mathrm{OT}+\mathrm{OH}=5+\sqrt{5^2-\left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2}=5+5\sqrt{\frac{2}{11}}$$

以上より，三角錐 TPQR の体積は

$$\frac{1}{3}(\triangle\mathrm{PQR}\text{ の面積})\cdot\mathrm{TH}=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{11}\cdot\left(5+5\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$$
$$=\boldsymbol{10(\sqrt{11}+\sqrt{2})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．