$f(x)$ は x に関する 4 次多項式で 4 次の係数は 1 である．$f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると 1 余り，$(x-1)^2$ で割ると 2 余る．$f(x)$ を求めよ．

(24 一橋大 3)

【答】 $f(x)=x^4-\dfrac{1}{4}x^3-2x^2+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}$

【解答】

4 次の係数は 1 である 4 次多項式 $f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると 1 余り，$(x-1)^2$ で割ると 2 余るから

$$f(x)=(x+1)^2(x^2+ax+b)+1 \quad \cdots\cdots ①$$
$$f(x)=(x-1)^2(x^2+cx+d)+2 \quad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる．① は

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2+2x+1)(x^2+ax+b)+1\\ &=x^4+(a+2)x^3+(2a+b+1)x^2+(a+2b)x+b+1 \end{aligned}$$

と展開され，② は

$$\begin{aligned} f(x)&=(x^2-2x+1)(x^2+cx+d)+2\\ &=x^4+(c-2)x^3+(d-2c+1)x^2+(c-2d)x+d+2 \end{aligned}$$

と展開される．2 式を比較して

$$\begin{cases} a+2=c-2\\ 2a+b+1=d-2c+1\\ a+2b=c-2d\\ b+1=d+2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=c-4\\ b=d+1\\ 2(c-4)+(d+1)=d-2c\\ (c-4)+2(d+1)=c-2d \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} a=c-4\\ b=d+1\\ 4c=7\\ 4d=2 \end{cases} \qquad \therefore \quad c=\frac{7}{4},\ d=\frac{1}{2},\ a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{3}{2}$$

である．よって

$$f(x)=x^4+\left(-\frac{9}{4}+2\right)x^3+\left\{2\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{2}+1\right\}x^2+\left(-\frac{9}{4}+2\cdot\frac{3}{2}\right)x+\frac{3}{2}+1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x)=x^4-\frac{1}{4}x^3-2x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ① を $(x-1)^2$ で割った式に変形する．

  $x-1=t$ とおくと $x=t+1$ であるから，① は

$$\begin{aligned} f(x)&=(t+1+1)^2\{(t+1)^2+a(t+1)+b\}+1\\ &=(t^2+4t+4)\{t^2+(a+2)t+a+b+1\}+1\\ &=t^4+(a+6)t^3+(5a+b+13)t^2+(8a+4b+12)t+4a+4b+5\\ &=t^2\{t^2+(a+6)t+5a+b+13\}+(8a+4b+12)t+4a+4b+5\\ &=(x-1)^2\{(x-1)^2+(a+6)(x-1)+5a+b+13\}\\ &\qquad +(8a+4b+12)(x-1)+4a+4b+5\\ &=(x-1)^2\{(x-1)^2+(a+6)(x-1)+5a+b+13\}\\ &\qquad +4(2a+b+3)x-4a-7 \end{aligned}$$

  $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは 2 であるから

$$\begin{cases} 2a+b+3=0\\ -4a-7=2 \end{cases} \qquad \therefore \quad a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{3}{2}$$

  以下,【解答】と同じ．