$S(x)$ を x の 2 次式とする．x の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$，余りを $U(x)$ とする．ただし，$S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする．

(1) $P(x)=2x^3+7x^2+10x+5,\ S(x)=x^2+4x+7$ の場合を考える．

方程式 $S(x)=0$ の解は $x=\boxed{\text{コサ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,i$ である．

また，$T(x)=\boxed{\text{ス}}x-\boxed{\text{セ}}$，$U(x)=\boxed{\text{ソタ}}$ である．

(2) 方程式 $S(x)=0$ は異なる二つの解 $\alpha,\ \beta$ をもつとする．このとき

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる

ことと同値な条件を考える．

(i) 余りが定数になるときを考えてみよう．

仮定から，定数 k を用いて $U(x)=k$ とおける．このとき，$\boxed{\text{チ}}$．したがって，余りが定数になるとき，$\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つ．

$\boxed{\text{チ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪〜③のうちから一つ選べ．

⓪ $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる．また，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

① $P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

② $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる．また，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

③ $P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ $T(\alpha)=T(\beta)$	① $P(\alpha)=P(\beta)$
② $T(\alpha)\fallingdotseq T(\beta)$	③ $P(\alpha)\fallingdotseq P(\beta)$

(ii) 逆に $\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つとき，余りが定数になるかを調べよう．

$S(x)$ が 2 次式であるから，$m,\ n$ を定数として $U(x)=mx+n$ とおける．$P(x)$ を $S(x),\ T(x),\ m,\ n$ を用いて表すと，$P(x)=\boxed{\text{テ}}$ となる．この等式の x に $\alpha,\ \beta$ をそれぞれ代入すると $\boxed{\text{ト}}$ となるので，$\boxed{\text{ツ}}$ と $\alpha\fallingdotseq\beta$ より $\boxed{\text{ナ}}$ となる．以上から余りが定数になることがわかる．

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ $(mx+n)S(x)T(x)$	① $S(x)T(x)+mx+n$
② $(mx+n)S(x)+T(x)$	③ $(mx+n)T(x)+S(x)$

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ $P(\alpha)=T(\alpha)$ かつ $P(\beta)=T(\beta)$
① $P(\alpha)=m\alpha+n$ かつ $P(\beta)=m\beta+n$
② $P(\alpha)=(m\alpha+n)T(\alpha)$ かつ $P(\beta)=(m\beta+n)T(\beta)$
③ $P(\alpha)=P(\beta)=0$
④ $P(\alpha)\neq 0$ かつ $P(\beta)\neq 0$

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ $m\neq 0$	① $m\neq 0$ かつ $n=0$
② $m\neq 0$ かつ $n\neq 0$	③ $m=0$
④ $m=n=0$	⑤ $m=0$ かつ $n\neq 0$
⑥ $n=0$	⑦ $n\neq 0$

(i), (ii) の考察から，方程式 $S(x)=0$ が異なる二つの解 α, β をもつとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $\boxed{\text{ツ}}$ であることは同値である．

(3) p を定数とし，$P(x)=x^{10}-2x^9-px^2-5x$，$S(x)=x^2-x-2$ の場合を考える．$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき，$p=\boxed{\text{ニヌ}}$ となり，その余りは $\boxed{\text{ネノ}}$ となる．

(24 共通テスト 本試験 II・IIB 1-2)

【答】

コサ	シ	ス	セ	ソタ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニヌ	ネノ
-2	3	2	1	12	3	1	1	1	3	-6	14

【解答】

$$P(x)=S(x)T(x)+U(x)\quad (S(x)\text{ は } x \text{ の 2 次式})$$

(1)
$$P(x)=2x^3+7x^2+10x+5,$$
$$S(x)=x^2+4x+7$$

方程式 $S(x)=0$ の解は

$$\begin{aligned}x&=-2\pm\sqrt{2^2-7}\\&=\mathbf{-2}\pm\sqrt{\mathbf{3}}i\end{aligned}$$
……(答)

である．また，割り算を実行すると右のようになるから

$$\begin{array}{r} 2x\quad -1 \\ x^2+4x+7\,\overline{\big)\,2x^3+7x^2+10x+5} \\ \underline{2x^3+8x^2+14x} \\ -x^2\;-4x+5 \\ \underline{-x^2\;-4x-7} \\ 12 \end{array}$$

商 : $T(x)=\mathbf{2}x-\mathbf{1}$ ……(答)

余り : $U(x)=\mathbf{12}$ ……(答)

である．

(2) 方程式 $S(x)=0$ は異なる二つの解 α, β をもつから

$$S(\alpha)=S(\beta)=0 \quad\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

(i) $P(x)$ を $S(x)$ で割った余り $U(x)$ が定数 k になるとき

$$P(x) = S(x)T(x) + k \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．このとき

① かつ ② が成り立つことから $\boldsymbol{P(\alpha) = P(\beta) = k}$ となる　(③)　……(答)

ことが導かれる．したがって，余りが定数になるとき

$$\boldsymbol{P(\alpha) = P(\beta)} \quad (①) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が成り立つ．

(ii) 逆に $P(\alpha) = P(\beta)$ が成り立つとき，$S(x)$ が 2 次式であるから，m, n を定数として余り $U(x)$ を $U(x) = mx + n$ とおけて

$$\boldsymbol{P(x) = S(x)T(x) + mx + n} \quad (①) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．この等式の x に α, β をそれぞれ代入すると，① より

$\boldsymbol{P(\alpha) = m\alpha + n}$ かつ $\boldsymbol{P(\beta) = m\beta + n}$　(①)　……(答)

となるので，$P(\alpha) = P(\beta)$ より

$$m\alpha + n = m\beta + n$$
$$m(\alpha - \beta) = 0$$

$\alpha \fallingdotseq \beta$ より

$$\boldsymbol{m = 0} \quad (③) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．以上から余りは n，すなわち，定数になることがわかる．

(i)，(ii) の考察から，方程式 $S(x) = 0$ が異なる二つの解 α, β をもつとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $P(\alpha) = P(\beta)$ であることは同値である．

(3) $P(x) = x^{10} - 2x^9 - px^2 - 5x$ (p は定数)，$S(x) = x^2 - x - 2$ のとき，$S(x) = 0$ の解は

$$(x-2)(x+1) = 0 \qquad \therefore \quad x = 2,\ -1$$

であるから，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる条件は

$$P(2) = P(-1)$$
$$2^{10} - 2 \cdot 2^9 - 4p - 10 = (-1)^{10} - 2 \cdot (-1)^9 - p + 5$$
$$-4p - 10 = -p + 8$$
$$\therefore \quad p = \boldsymbol{-6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となり，その余りは

$$P(2)(= P(-1)) = \boldsymbol{14} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．