実数 x に対し $n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を $[x]$ と表す．方程式 $x^2-[x]-1=0$ を解きなさい．

(24 公立千歳科技大 理工 1(4))

【答】 $x=\sqrt{2}$

【解答】

$$x^2-[x]-1=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

実数 x に対し，$[x]$ は $n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n であるから

$$[x] \leqq x < [x]+1$$

であり，$(*)$ より $[x]=x^2-1$ であるから

$$x^2-1 \leqq x < (x^2-1)+1 \iff \begin{cases} x^2-x-1 \leqq 0 \\ x^2-x>0 \end{cases}$$

解くと

$$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x<0 \text{ または } 1<x \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq x < 0 \text{ または } 1 < x \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$2<\sqrt{5}<3$ に注意する．

(i) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq x < 0$ のとき

$$\frac{1-3}{2} < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1-2}{2} \qquad \therefore \quad -1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$$

であり，(i) を満たす x に対して $[x]=-1$ である．このとき $(*)$ は

$$x^2-(-1)-1=0 \qquad \therefore \quad x=0$$

これは (i) に反する．

(ii) $1<x\leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$\frac{1+2}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \frac{1+3}{2} \qquad \therefore \quad \frac{3}{2} < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 2$$

であり，(ii) を満たす x に対して $[x]=1$ である．このとき $(*)$ は

$$x^2-1-1=0 \qquad \therefore \quad x=\pm\sqrt{2}$$

(ii) を満たす x は

$$x=\sqrt{2}$$

である．

(i)，(ii) より $(*)$ を満たす x は

$$\boldsymbol{x=\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．