a を定数として，x についての 2 次方程式

$$x^2 - ax - 2a + 5 = 0$$

を考える．

(1) $x > 0$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(2) $-1 < x < 2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(24 青森公立大 3)

【答】

(1) $2 < a < \dfrac{5}{2}$

(2) $2 \leqq a < 6$

【解答】

$$x^2 - ax - 2a + 5 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $f(x) = x^2 - ax - 2a + 5$ とおく．

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - 2a + 5$$

方程式 $f(x) = 0$ が $x > 0$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は

$$\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標}: -\dfrac{a^2}{4} - 2a + 5 < 0 \\ \text{軸の位置}: \dfrac{a}{2} > 0 \\ \text{端点の } y \text{ 座標}: f(0) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 8a - 20 > 0 \\ a > 0 \\ -2a + 5 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+10)(a-2) > 0 \\ a > 0 \\ a < \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

第 1 式より 「$a < -10$ または $2 < a$」 を得るから，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{2 < a < \frac{5}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

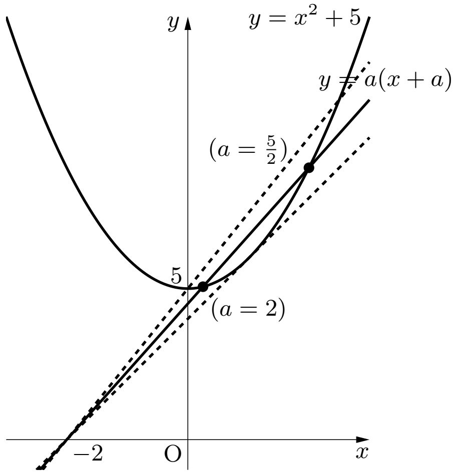
- 方程式 $f(x) = 0$ の 2 解を α, β とおく．
  方程式 $f(x) = 0$ が $x > 0$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は

$$\begin{cases} (\text{判別式}) > 0 \\ \alpha + \beta > 0 \\ \alpha\beta > 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a^2 - 4(-2a+5) > 0 \\ a > 0 \\ -2a + 5 > 0 \end{cases}$$

以下【解答】と同じ．

- ① $\iff$ $x^2+5=a(x+2)$ …… ①$'$

方程式 $f(x)=0$ が $x>0$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は，点 $(-2,\ 0)$ を通り傾き a の直線 $y=a(x+2)$ が放物線 $y=x^2+5$ と $x>0$ の範囲で 2 つの共有点をもつことである．



直線 $y=a(x+2)$ が放物線 $y=x^2+5$ と接するのは，①$'$ すなわち ① が重解をもつときであり，(判別式) $=0$ より

$$a=-10,\ 2$$

を得る．接点の x 座標は $x=\dfrac{a}{2}$ であるから，$x>0$ の範囲で接するためには $a>0$ が必要であり

$$a=2$$

である．

直線 $y=a(x+2)$ が点 $(0,\ 5)$ を通るのときの a の値は

$$5=a(0+2) \qquad \therefore \quad a=\frac{5}{2}$$

である．

以上右図より，求める a の値の範囲は

$$2<a<\frac{5}{2}$$

である．

(2) 「方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ …… $(*)$」ための条件を軸 $x=\dfrac{a}{2}$ の位置で場合分けしながら求める．

(i) $\dfrac{a}{2} \leqq -1$ $(a \leqq -2)$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} f(-1)<0 \\ f(2)>0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 1+a-2a+5<0 \\ 4-2a-2a+5>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} 6<a \\ a<\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

これを満たす a は存在しない．

(ii) $-1<\dfrac{a}{2}<2$ $(-2<a<4)$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} f\left(\dfrac{a}{2}\right) \leqq 0 \\ f(-1)>0 \text{ または } f(2)>0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -\dfrac{a^2}{4}-2a+5 \leqq 0 \\ 1+a-2a+5>0 \text{ または } 4-2a-2a+5>0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} (a+10)(a-2) \geqq 0 \\ a<6 \text{ または } a<\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\therefore \quad a \leqq -10 \text{ または } 2 \leqq a < 6$$

(ii) の範囲とあわせると

$$2 \leqq a < 4$$

である．

(iii) $\dfrac{a}{2} \geqq 2$ $(a \geqq 4)$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 1 + a - 2a + 5 > 0 \\ 4 - 2a - 2a + 5 < 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \frac{9}{4} < a < 6$$

(iii) の範囲とあわせると

$$4 \leqq a < 6$$

である．

以上 (i)(ii)(iii) より，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{2 \leqq a < 6} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $$x^2 + 5 = a(x+2) \qquad \cdots\cdots ①'$$

方程式 $f(x) = 0$ が $-1 < x < 2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつための条件は，点 $(-2,\ 0)$ を通り傾き a の直線 $y = a(x+2)$ が放物線 $y = x^2 + 5$ と $-1 < x < 2$ の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつことである．

直線 $y = a(x+2)$ が放物線 $y = x^2 + 5$ と接するのは，①′ すなわち ① が重解をもつときであり，(判別式) $= 0$ より

$$a = -10,\ 2$$

を得る．接点の x 座標は $x = \dfrac{a}{2}$ であるから，$-1 < x < 2$ の範囲で接するためには

$$-1 < \frac{a}{2} < 2 \qquad \therefore \quad -2 < a < 4$$

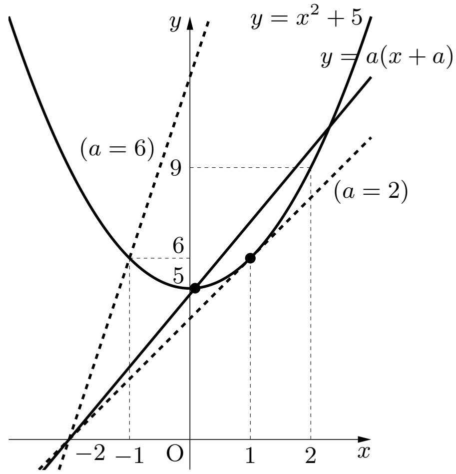
が必要であり，

$$a = 2$$

である．このとき接点の x 座標は

$$x = 1$$

である．



直線 $y = a(x+2)$ が点 $(-1,\ 6)$ を通るのときの a の値は

$$6 = a(-1+2) \qquad \therefore \quad a = 6$$

である．

以上右図より，求める a の値の範囲は

$$2 \leqq a < 6$$

である．