a と b を実数とするとき，$|a+b| \leqq |a|+|b|$ が成り立つことを証明しなさい．

(24 公立千歳科技大 理工 4(1))

【答】 略

【解答】

$|a+b| \geqq 0,\ |a|+|b| \geqq 0$ であり

$$|a+b| \leqq |a|+|b| \iff |a+b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$$

であるから，$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2 \geqq 0$ が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}
&(|a|+|b|)^2-|a+b|^2 \\
&=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a^2+2ab+b^2) \\
&=(a^2+2|ab|+b^2)-(a^2+2ab+b^2) \\
&=2(|ab|-ab) \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

であり

$$|a+b| \leqq |a|+|b|$$

は成り立つ．等号が成り立つのは

$$|ab|-ab=0 \quad \text{すなわち} \quad ab \geqq 0\ (a,\ b\ \text{が同符号またはともに}\ 0)$$

のときである．