(1) k を実数の定数とするとき，$f(x)=x^2-2kx-2k^2+2k+1$ の $-3 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値は，k が以下の範囲にあるとき，

$k<\boxed{\text{アイ}}$ のとき，　最大値 $\boxed{\text{ウ}}$ 最小値 $\boxed{\text{エ}}$

$\boxed{\text{アイ}}<k<\boxed{\text{オカ}}$ のとき，　最大値 $\boxed{\text{キ}}$ 最小値 $\boxed{\text{ク}}$

$\boxed{\text{オカ}}<k<\boxed{\text{ケ}}$ のとき，　最大値 $\boxed{\text{コ}}$ 最小値 $\boxed{\text{サ}}$

$\boxed{\text{ケ}}<k$ のとき，　最大値 $\boxed{\text{シ}}$ 最小値 $\boxed{\text{ス}}$ である．

ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものは下の①〜④ の中から 1 つずつ選べ．同じものを繰り返し選んでもよいものとする．

⓪ $f(-3)$　　① $f(-1)$　　② $f(0)$　　③ $f(1)$　　④ $f(k)$

(2) 2 次方程式 $x^2-2kx-2k^2+2k+1=0$ の実数解が $-3<x \leqq 1$ に存在するような k の値の範囲は，

$$\boxed{\text{セソ}}\ \boxed{\text{タ}}\ k\ \boxed{\text{チ}}\ \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}},\quad \boxed{\text{ナ}}\ \boxed{\text{ニ}}\ k\ \boxed{\text{ヌ}}\ \boxed{\text{ネ}}$$ である．

ただし，$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものは下の⓪〜② の中から 1 つずつ選べ．同じものを繰り返し選んでもよいものとする．

⓪ $=$　　① $<$　　② $\leqq$

(24 久留米大 後 医 1)

【答】

アイ	ウ	エ	オカ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セソ	タ	チ	ツテ
-3	3	0	-1	3	4	1	0	4	0	3	-1	2	2	-1

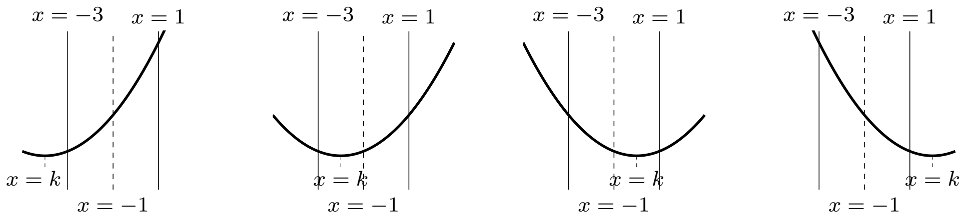
ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
3	1	2	1	5

【解答】

(1)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2kx-2k^2+2k+1 \\ &= (x-k)^2-3k^2+2k+1 \end{aligned}$$

$y=f(x)$ の軸の方程式は $x=k$ であり，定義域 $-3 \leqq x \leqq 1$ の中点が $x=-1$ であることに注意しながら，解答欄にあわせて場合分けし，図示すると下図を得る．

$k<-3$ のとき　　$-3<k<-1$ のとき　　$-1<k<1$ のとき　　$1<k$ のとき



したがって，k が次の範囲にあるときの $f(x)$ の最大値，最小値は

$k < \mathbf{-3}$ のとき，　最大値 $\boldsymbol{f(1)}$，最小値 $\boldsymbol{f(-3)}$ ……（答）
$-3 < k < \mathbf{-1}$ のとき，　最大値 $\boldsymbol{f(1)}$，最小値 $\boldsymbol{f(k)}$ ……（答）
$-1 < k < \mathbf{1}$ のとき，　最大値 $\boldsymbol{f(-3)}$，最小値 $\boldsymbol{f(k)}$ ……（答）
$1 < k$ のとき，　最大値 $\boldsymbol{f(-3)}$，最小値 $\boldsymbol{f(1)}$ ……（答）

である．

(2)
$$f(-3) = -2k^2 + 8k + 10 = -2(k+1)(k-5)$$
$$f(1) = -2k^2 + 2 = -2(k+1)(k-1)$$
$$f(k) = -3k^2 + 2k + 1 = -(3k+1)(k-1)$$

(1) より $-3 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値，最小値は k の関数であり，それぞれを $M(k)$，$m(k)$ と表す．$M(k)$，$m(k)$ はどちらも連続であり

$$M(k) = \begin{cases} f(1) = -2(k+1)(k-1) & (k \leqq -1 \text{ のとき}) \\ f(-3) = -2(k+1)(k-5) & (-1 \leqq k \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$m(k) = \begin{cases} f(-3) = -2(k+1)(k-5) & (k \leqq -3 \text{ のとき}) \\ f(k) = -(3k+1)(k-1) & (-3 \leqq k \leqq 1 \text{ のとき}) \\ f(1) = -2(k+1)(k-1) & (1 \leqq k \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

$-3 < x \leqq 1$ における $f(x)$ のとり得る値の範囲を考えるとき，$f(-3)$ が除かれることに注意する．

$M(k)$ については，$k = -1$ のとき $M(-1) = f(1) = f(-3) = 0$ であり

$$f(x) \leqq f(1) = -2(k+1)(k-1) \quad (k \leqq -1 \text{ のとき})$$
$$f(x) < f(-3) = -2(k+1)(k-5) \quad (-1 < k \text{ のとき})$$

$m(k)$ については，$k = -3$ のとき $m(-3) = f(-3) = -32$ であり

$$f(x) > f(-3) = -2(k+1)(k-5) \quad (k \leqq -3 \text{ のとき})$$
$$f(x) \geqq f(k) = -(3k+1)(k-1) \quad (-3 < k \leqq 1 \text{ のとき})$$
$$f(x) \geqq f(1) = -2(k+1)(k-1) \quad (1 \leqq k \text{ のとき})$$

である．したがって

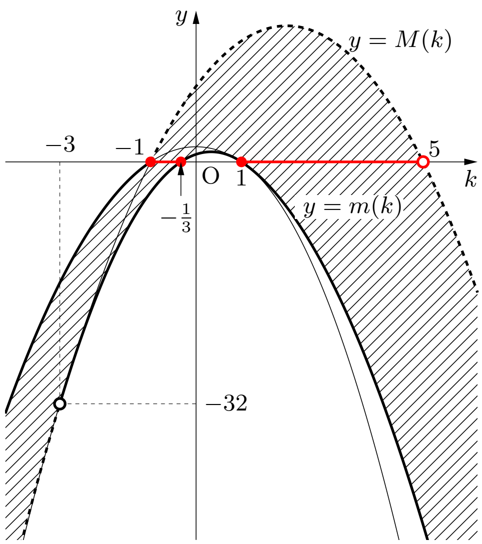
(i) $k \leqq -3$ のとき
$$f(-3) < f(x) \leqq f(1)$$

(ii) $-3 < k \leqq -1$ のとき
$$f(k) \leqq f(x) \leqq f(1)$$

(iii) $-1 < k \leqq 1$ のとき
$$f(k) \leqq f(x) < f(-3)$$

(iv) $1 \leqq k$ のとき
$$f(1) \leqq f(x) < f(-3)$$

となる．



この領域を ky 平面に図示すると右図の斜線部分となる．境界は実線部分は含み，破線部分は除く．

よって，$f(x) = 0$ となる実数解が $-3 < x \leqq 1$ に存在するような k の値の範囲は

$$\boldsymbol{-1 \leqq k \leqq -\frac{1}{3},\ 1 \leqq k < 5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $x^2-2kx-2k^2+2k+1=0\ (-3<x\leqq 1)$ を

$$x^2-2kx=2k^2-2k-1\ (-3<x\leqq 1)$$

と変形し

$$\begin{cases} y=x^2-2kx\ (-3<x\leqq 1) \\ y=2k^2-2k-1 \end{cases}$$

を満たす x が存在するような k の値の範囲を求める．

ky 平面において $y=-2xk+x^2\ (-3<x\leqq 1)$ は直線であり

$$y=(x-k)^2-k^2$$

なので，放物線 $y=-k^2$ と連立すると $k=x$ で重解をもつ．すなわち，$y=-2xk+x^2$ は放物線 $y=-k^2$ の $k=x$ における接線である (放物線 $y=-k^2$ は直線 $y=-2xk+x^2$ の包絡線である)．

$-3<x\leqq 1$ のときの直線 $y=-2xk+x^2$ の通過領域と放物線 $y=2k^2-2k-1=2\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^2+-\dfrac{3}{4}$ が共有点をもつような k の値の範囲が求めるものである．

$$\begin{cases} y=-k^2 \\ y=2k^2-2k-1 \end{cases} \quad \text{より}$$

$$3k^2-2k-1=0 \qquad \therefore\quad (3k+1)(k-1)=0 \qquad \therefore\quad k=-\frac{1}{3},\ 1$$

$$\begin{cases} y=6k+9 \\ y=2k^2-2k-1 \end{cases} \quad \text{より}$$

$$2k^2-8k-10=0 \qquad \therefore\quad 2(k+1)(k-5)=0 \qquad \therefore\quad k=-1,\ 5$$

$$\begin{cases} y=-2k+1 \\ y=2k^2-2k-1 \end{cases} \quad \text{より}$$

$$2k^2-2=0 \qquad \therefore\quad 2(k+1)(k-1)=0 \qquad \therefore\quad k=-1,\ 5$$

であるから，下図となり

$$-1\leqq k\leqq -\frac{1}{3},\ 1\leqq k<5$$

を得る．