

a は正の定数とする．次の関数の最大値を求めよ．

$$f(x) = \left| x^2 - \left(ax + \frac{3}{4}a^2 \right) \right| + ax + \frac{3}{4}a^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

(24 京都大 文系 3)

$$\text{【答】} \begin{cases} \frac{3}{2}a^2 + 2a - 1 & (1 \leq a \text{ のとき}) \\ \frac{5}{2}a^2 & \left(\sqrt{\frac{5}{2}} \leq a \leq 1 \text{ のとき} \right) \\ 1 & \left(0 < a \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

【解答】

$$f(x) = \left| x^2 - \left(ax + \frac{3}{4}a^2 \right) \right| + ax + \frac{3}{4}a^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

絶対値の中は

$$x^2 - \left(ax + \frac{3}{4}a^2 \right) = \left(x + \frac{a}{2} \right) \left(x - \frac{3}{2}a \right)$$

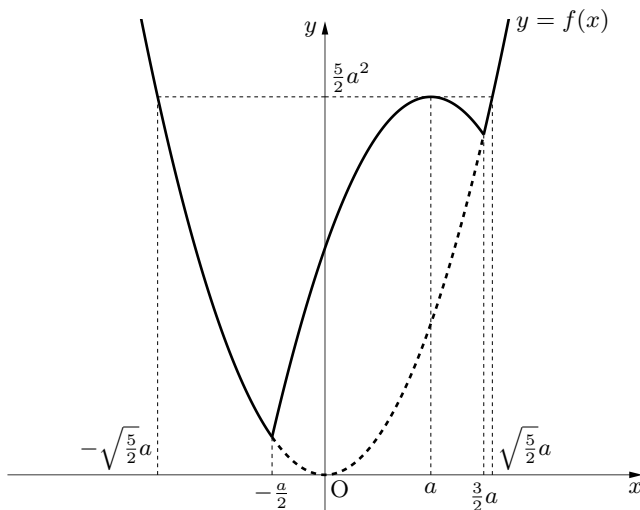
であり， $a > 0$ であることに注意すると

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \left(x \leq -\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a \leq x \text{ のとき} \right) \\ -x^2 + 2ax + \frac{3}{2}a^2 & \left(-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}a \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

$-x^2 + 2ax + \frac{3}{2}a^2 = -(x-a)^2 + \frac{5}{2}a^2$ であり， $y = x^2$ と $y = \frac{5}{2}a^2$ の交点の x 座標は

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}a$$

である．したがって，実数全体における $y = f(x)$ のグラフは下図となる．



$-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値を M とおく．

- (i) $-\frac{a}{2} \leq -1$ かつ $1 \leq a$ (すなわち $2 \leq a$) のとき
 $-1 \leq x \leq 1$ で $y = f(x)$ は単調増加であり

$$M = f(1) = -1^2 + 2a + \frac{3}{2}a^2$$

である.

- (ii) $-1 \leq -\frac{a}{2}$ かつ $1 \leq a$ (すなわち $1 \leq a \leq 2$) のとき

$$\begin{aligned} f(1) - f(-1) &= \left(-1^2 + 2a + \frac{3}{2}a^2\right) - (-1)^2 \\ &= \frac{3}{2}a^2 + 2a - 2 \\ &= \frac{1}{2}(a+2)(3a-2) \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから

$$M = f(1) = -1^2 + 2a + \frac{3}{2}a^2$$

である.

- (iii) $a \leq 1 \leq \sqrt{\frac{5}{2}}a$ (すなわち $\sqrt{\frac{2}{5}} \leq a \leq 1$) のとき

$$M = f(a) = \frac{5}{2}a^2$$

である.

- (iv) $\sqrt{\frac{5}{2}}a \leq 1$ (すなわち $0 < a \leq \sqrt{\frac{2}{5}}$) のとき

$$M = f(\pm 1) = (\pm 1)^2 = 1$$

である.

以上 (i)~(iv) より

$$M = \begin{cases} \frac{3}{2}a^2 + 2a - 1 & (1 \leq a \text{ のとき}) \\ \frac{5}{2}a^2 & \left(\sqrt{\frac{5}{2}} \leq a \leq 1 \text{ のとき}\right) \\ 1 & \left(0 < a \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

.....(答)

である.