関数 $f(x) = ||x^2 + 2x| - 1| - 1$ の最小値および $f(x)$ が最小となる x の値をすべて求めなさい．

(24 公立千歳科技大 中期 理工 1(5))

【答】 $x = -1 \pm \sqrt{2},\ -1$ のとき，最小値 -1

【解答】

$f(x) = ||x^2 + 2x| - 1| - 1$ において $||x^2 + 2x| - 1| \geqq 0$ であるから，$|x^2 + 2x| - 1 = 0$ となる x，すなわち $|x^2 + 2x| = 1$ となる x が存在するならば，その x の値のとき $f(x)$ は最小値 -1 をとる．

$$|x^2 + 2x| = 1 \iff x^2 + 2x = \pm 1$$

$x^2 + 2x - 1 = 0$ を解くと　$x = -1 \pm \sqrt{2}$
$x^2 + 2x + 1 = 0$ を解くと　$x = -1$

である．よって，$f(x)$ は

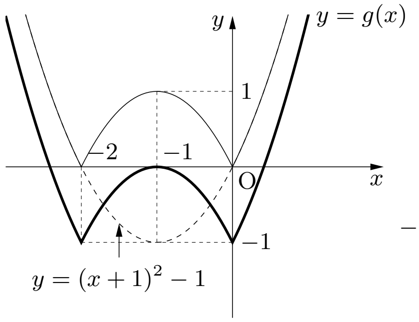
$$\boldsymbol{x = 1 \pm \sqrt{2},\ -1} \textbf{ のとき，最小値 } \boldsymbol{-1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

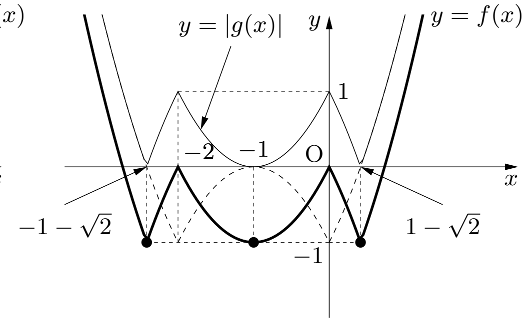
をとる．

- $$\begin{aligned} f(x) &= ||x^2 + 2x| - 1| - 1 \\ &= ||(x+1)^2 - 1| - 1| - 1 \end{aligned}$$

  $g(x) = |(x+1)^2 - 1| - 1$ とおくと，$y = g(x)$ のグラフは，$y = (x+1)^2 - 1$ のグラフの $y \leqq 0$ の部分を x 軸に関して対称移動して得られた $y = |(x+1)^2 - 1|$ のグラフを，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである (下左図)．

  さらに，$y = g(x)$ のグラフの $y \leqq 0$ の部分を x 軸に関して対称移動して得られた $y = |g(x)|$ のグラフを，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものが $y = f(x)$ のグラフである (下右図)．





  よって，$f(x)$ は

  $$x = 1 \pm \sqrt{2}, -1 \text{ のとき，最小値 } -1$$

  をとる．