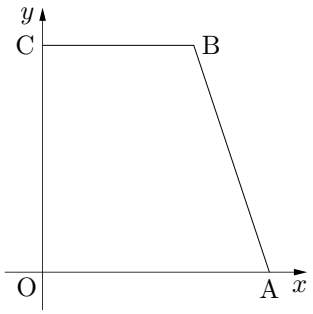
座標平面上に 4 点 O(0, 0)，A(6, 0)，B(4, 6)，C(0, 6) を頂点とする台形 OABC がある．また，この座標平面上で，点 P，Q は次の規則に従って移動する．

規則

- P は，O から出発して毎秒 1 の一定の速さで x 軸上を正の向きに A まで移動し，A に到達した時点で移動を終了する．
- Q は，C から出発して y 軸上を負の向きに O まで移動し，O に到達した後は y 軸上を正の向きに C まで移動する．そして，C に到達した時点で移動を終了する．ただし，Q は毎秒 2 の一定の速さで移動する．
- P，Q は同時刻に移動を開始する．

この規則に従って P，Q が移動するとき，P，Q はそれぞれ A，C に同時刻に到達し，移動を終了する．

以下において，P，Q が移動を開始する時刻を**開始時刻**，移動を終了する時刻を**終了時刻**とする．



参考図

(1) **開始時刻**から 1 秒後の △PBQ の面積は ア である．

(2) **開始時刻**から 3 秒間の △PBQ の面積について，面積の最小値は イ であり，最大値は ウエ である．

(3) **開始時刻**から**終了時刻**までの △PBQ の面積について，面積の最小値は オ であり，最大値は カキ である．

(4) **開始時刻**から**終了時刻**までの △PBQ の面積について，面積が 10 以下となる時間は $\left(\boxed{\text{ク}} - \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}\right)$ 秒間である．

(24 共通テスト 本試験 I 3-2・IA 2-1)

【答】

ア	イ	ウエ	オ	カキ	ク	ケ	コ
9	8	12	8	13	3	3	2

【解答】

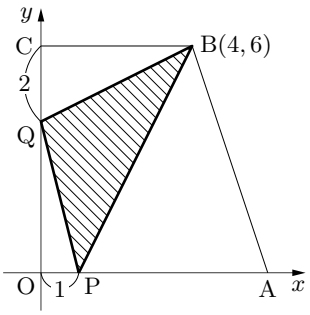
(1) 開始時刻から 1 秒後の P，Q の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}(1,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ 4)$$

であるから，△PBQ の面積は

$$\begin{aligned}
&(\text{台形 OPBC の面積})\\
&\quad -(\triangle\mathrm{OPQ}\text{ の面積})-(\triangle\mathrm{BCQ}\text{ の面積})\\
&=\frac{1}{2}(1+4)\cdot 6-\frac{1}{2}1\cdot 4-\frac{1}{2}2\cdot 4\\
&=15-2-4\\
&=\mathbf{9}
\end{aligned}$$ ……(答)

である．



(2) 開始時刻から t $(0 \leqq t \leqq 3)$ 秒後の P，Q の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}(t,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ 6-2t)$$

であるから，△PBQ の面積は

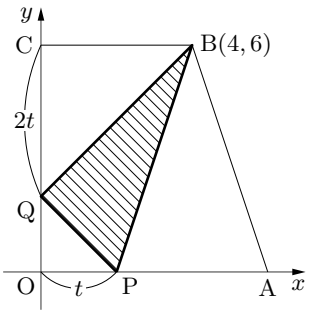
$$\begin{aligned}
&(\text{台形 OPBC の面積})\\
&\quad -(\triangle\mathrm{OPQ}\text{ の面積})-(\triangle\mathrm{BCQ}\text{ の面積})\\
&=\frac{1}{2}(t+4)\cdot 6-\frac{1}{2}t\cdot(6-2t)-\frac{1}{2}\cdot 2t\cdot 4\\
&=3(t+4)-t(3-t)-4t\\
&=t^2-4t+12\\
&=(t-2)^2+8
\end{aligned}$$

である．よって，$0 \leqq t \leqq 3$ に注意すると，△PBQ の面積は

$t=2$ のとき，　最小値　$\mathbf{8}$, ……(答)

$t=0$ のとき，　最大値　$\mathbf{12}$ ……(答)

をとる．



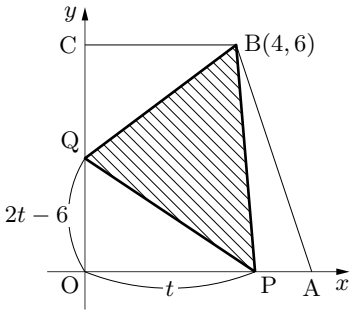
(3) 開始時刻から t $(3 \leqq t \leqq 6)$ 秒後の P，Q の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}(t,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ 2t-6)$$

であるから，△PBQ の面積は

$$\begin{aligned}
&(\text{台形 OPBC の面積})\\
&\quad -(\triangle\mathrm{OPQ}\text{ の面積})-(\triangle\mathrm{BCQ}\text{ の面積})\\
&=\frac{1}{2}(t+4)\cdot 6-\frac{1}{2}t\cdot(2t-6)-\frac{1}{2}\cdot(12-2t)\cdot 4\\
&=3(t+4)-t(t-3)-2(12-2t)\\
&=-t^2+10t-12\\
&=-(t-5)^2+13
\end{aligned}$$

である．



(2) とあわせると $0 \leqq t \leqq 6$ における △PBQ の面積 $S(t)$ は

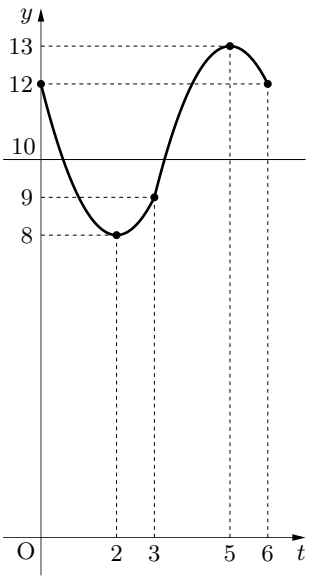
$$S(t) = \begin{cases} (t-2)^2 + 8 & (0 \leqq t \leqq 3) \\ -(t-5)^2 + 13 & (3 \leqq t \leqq 6) \end{cases}$$

であり，グラフは右図となる．よって，△PBQ の面積 $S(t)$ は

$t = 2$ のとき，　最小値　$\mathbf{8}$,　　……(答)

$t = 5$ のとき，　最大値　$\mathbf{13}$　　……(答)

をとる．



(4) $S(t) = 10$ となる t の値を求める．

(i) $0 \leqq t \leqq 3$ のとき

$$(t-2)^2 + 8 = 10$$

$$\therefore \quad t = 2 - \sqrt{2}$$

(ii) $3 \leqq t \leqq 6$ のとき

$$-(t-5)^2 + 13 = 10$$

$$\therefore \quad t = 5 - \sqrt{3}$$

よって，△PBQ の面積 $S(t)$ が 10 以下となる時間は

$$(5 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{2}) = \mathbf{3 - \sqrt{3} + \sqrt{2}} \text{ 秒間}　　……(答)$$

である．