a を実数とする．$f(x)=x^2-ax+a^2-2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフと x 軸が $x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつような，a の値の範囲を求めよ．

(2) k を正の実数とし，$g(x)=kx$ とする．a が (1) の範囲にあるとき，$y=|f(x)|$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個となるような k を求めよ．

(24 千葉大 3)

【答】

(1) $\sqrt{2}<a<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

(2) $k=a-2\sqrt{a^2-2}$

【解答】

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2-ax+a^2-2\\ &=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2-2 \end{aligned}$$

(1) $y=f(x)$ のグラフと x 軸が $x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつための条件は

$$\begin{cases} \text{頂点の } y \text{ 座標}: f\left(\dfrac{a}{2}\right)<0\\ \text{軸の位置}: \dfrac{a}{2}>0\\ \text{端点の符号}: f(0)>0 \end{cases}$$

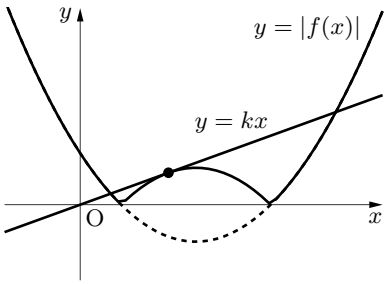
である．整理して a の値の範囲を求めると

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}a^2-2<0\\ a>0\\ a^2-2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2<a^2<\dfrac{8}{3}\\ a>0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\sqrt{2}<a<\frac{2\sqrt{6}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $y=g(x)=kx$ (k は正の実数)



a が (1) の範囲にあるとき，$y=|f(x)|$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個となるのは，$y=-f(x)$ の $y>0$ の部分と $y=g(x)$ が接するときである．

$$-(x^2-ax+a^2-2)=kx$$
$$x^2+(k-a)x+a^2-2=0$$

が重解をもつから，(判別式) $=0$ である．

$$(k-a)^2-4(a^2-2)=0$$
$$\therefore\quad k=a\pm2\sqrt{a^2-2}$$

$k>0$ であり接点の y 座標 $kx>0$ であるから，接点の x 座標 $x=-\dfrac{k-a}{2}$ は正であり，$k<a$ である．よって

$$\boldsymbol{k=a-2\sqrt{a^2-2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．