関数 $y=\dfrac{x+2}{2x+2}$ の逆関数を $y=f(x)$ で表す．また，k を定数として $g(x)=|2x+k|-3$ と定める．次の問いに答えよ．

(1) $y=\dfrac{x+2}{2x+2}$ の定義域と値域を求めよ．

(2) $f(x)$ を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(3) $k=1$ のとき，$f(x)\geqq g(x)$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

(4) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが接するときの k の値を求めよ．

(5) $x\leqq 0$ を満たすすべての x に対して $f(x)<g(x)$ が成り立つような k の値の範囲を求めよ．

(24 宇都宮大 データ経営 (理)・地域デ・工・農 3)

【答】

(1) 定義域は $x\neq -1$，値域は $y\neq \dfrac{1}{2}$

(2) $f(x)=\dfrac{2-2x}{2x-1}$，グラフは略．

(3) $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq 0,\ \dfrac{1}{2}<x\leqq 1$

(4) $k=-1,\ -5$

(5) $k<-1$

【解答】

(1)
$$y=\frac{x+2}{2x+2}\qquad\cdots\cdots ①$$

① の定義域は

$$2x+2\neq 0\qquad\therefore\quad \boldsymbol{x\neq -1}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

であり，$x\neq -1$ のもとで ① は

$$y(2x+2)=x+2$$
$$(2y-1)x=2-2y$$

である．値域は ① を満たす実数 $x(\neq -1)$ が存在するような y の集合であるから

$$2y-1\neq 0\qquad\therefore\quad \boldsymbol{y\neq \frac{1}{2}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) ① を x について解くと

$$x=\frac{2-2y}{2y-1}$$

であり，① の逆関数 $y=f(x)$ は

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2-2x}{2x-1}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．(1) の結果より $f(x)$ の

定義域は $x\neq \dfrac{1}{2}$，値域は $y\neq 1$

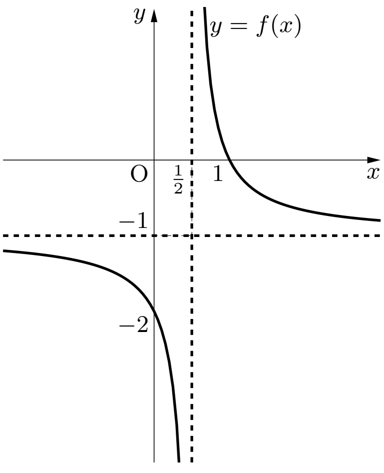
である．また

$$y=\frac{-(2x-1)+1}{2x-1}=\frac{1}{2x-1}-1$$

より，漸近線は

$$x=\frac{1}{2},\ y=-1$$

であり，$y=f(x)$ のグラフは右図となる．



(3) $$g(x)=|2x+k|-3$$

$k=1$ のとき

$$g(x)=|2x+1|-3$$
$$=\begin{cases}(2x+1)-3=2x-2 & \left(x\geqq-\dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)\\ -(2x+1)-3=-2x-4 & \left(x\leqq-\dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)\end{cases}$$

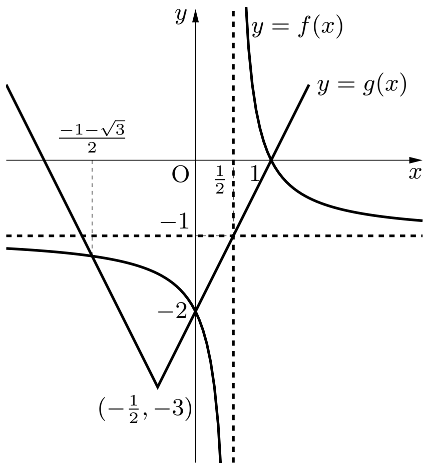
であり，$f(x)=g(x)$ の解は

$x\geqq-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\frac{2-2x}{2x-1}=2x-2$$
$$\Longleftrightarrow 1-x=(2x-1)(x-1)$$
$$\therefore\quad 2x^2-2x=0$$
$$\therefore\quad x=0,\ 1$$

$x\leqq-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\frac{2-2x}{2x-1}=-2x-4$$
$$\Longleftrightarrow 1-x=(2x-1)(-x-2)$$
$$\therefore\quad 2x^2+2x-1=0$$
$$\therefore\quad x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\left(\leqq-\frac{1}{2}\right)$$



$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフは右図となり，$f(x)\geqq g(x)$ を満たす x の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq 0,\ \frac{1}{2}<x\leqq 1}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $$g(x)=|2x+k|-3=\begin{cases}2x+k-3 & \left(x\geqq-\dfrac{k}{2}\text{のとき}\right)\\ -2x-k-3 & \left(x\leqq-\dfrac{k}{2}\text{のとき}\right)\end{cases}$$

である．また

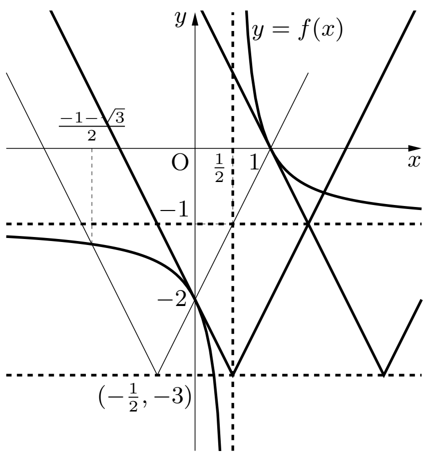
$$g(x)=|2x+k|-3=\left|2\left(x+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)+1\right|-3$$

であり，$y=g(x)$ のグラフは (3) のときの $y=g(x)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1-k}{2}$ だけ平行移動したものであるから，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが接するのは

$$f'(x)=-2$$

となるときである．

$$-\frac{2}{(2x-1)^2}=-2$$
$$\therefore\quad (2x-1)^2=1$$
$$\therefore\quad 2x-1=\pm 1$$
$$\therefore\quad x=0,\ 1$$



$y=f(x)$ 上の点 $(0,-2)$，$(1,\ 0)$ は $y=-2x-k-3$ との接点である．

点 $(0,\ -2)$ を通るとき

$$-2 = -2 \cdot 0 - k - 3 \qquad \therefore \quad k = -1$$

点 $(1,\ 0)$ を通るとき

$$0 = -2 \cdot 1 - k - 3 \qquad \therefore \quad k = -5$$

よって，求める k の値は

$$\boldsymbol{k = -1,\ -5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) (4) のグラフより，$x \leqq 0$ を満たすすべての x に対して $f(x) < g(x)$ が成り立つ k の値の範囲は

$$-\frac{k}{2} > \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{k < -1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．