(1) U を全体集合とし，A, B, C を U の部分集合とする．U, A, B, C の関係を図 1 のように表すと，例えば，$A\cap(B\cup C)$ は A と $B\cup C$ の共通部分で，$B\cup C$ は図 2 の斜線部分なので，$A\cap(B\cup C)$ は図 3 の斜線部分となる．

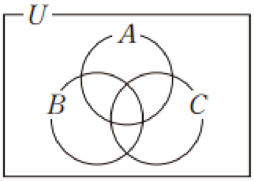


図 1

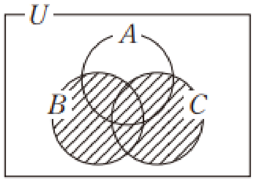


図 2

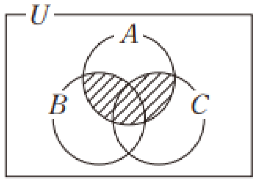
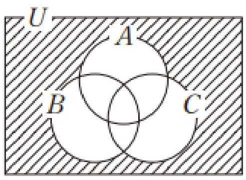


図 3

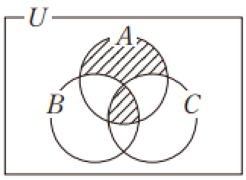
このとき，$\overline{A}\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$ は $\boxed{\text{テ}}$ の斜線部分，$A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$ は $\boxed{\text{ト}}$ の斜線部分である．

$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

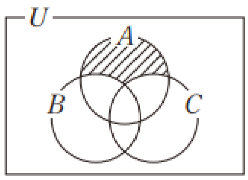
⓪



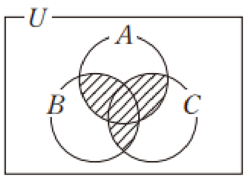
①



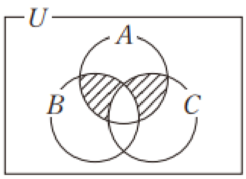
②



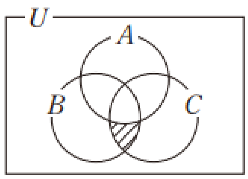
③



④



⑤



(2) 全体集合 U を，-5 以上 5 以下の整数全体の集合とする．また，a, b を整数として，次の A, B, C が U の部分集合になっているとする．

$$A=\{0,\ a-3,\ a+3\},\quad B=\{b-2,\ b+3\},\quad C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

(i) a, b がとり得る値について考える．$A\subset U$ であることから，a がとり得る値は $\boxed{\text{ナニ}}$ 以上 $\boxed{\text{ヌ}}$ 以下の整数である．また，$B\subset U$ であることから，b がとり得る値は $\boxed{\text{ネノ}}$ 以上 $\boxed{\text{ハ}}$ 以下の整数である．

(ii) A, B, C が次の条件を満たすとする．

条件

$\overline{A}\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=\{-5,\ -4,\ -3,\ -2\}$ である．

このとき $A\cup(B\cup C)$ の要素を具体的に考え，A の要素と比較すると $a=\boxed{\text{ヒ}}$ がわかる．このことより，さらに B の要素とも比較すると，b のとり得る値は 2 通りであることがわかる。

(iii) $A,\ B,\ C$ が (ii) の条件を満たすとする．このとき

$A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$ の要素の個数が 1 個であるとすると，$b=$ $\boxed{\text{フ}}$ であり

$A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$ の要素の個数が 2 個であるとすると，$b=$ $\boxed{\text{ヘ}}$ である．

(24 共通テスト 追・再試験 I 1[3])

【答】

テ	ト	ナニ	ヌ	ネノ	ハ	ヒ	フ	ヘ
0	2	-2	2	-3	2	2	2	1

【解答】

(1) ド・モルガンの法則により

$$\overline{A}\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=\overline{A}\cap(\overline{B\cup C})$$
$$=\overline{A\cup(B\cup C)}\qquad\cdots\cdots ①$$

であり，これは $A\cup(B\cup C)$ の補集合であるから

$\overline{A}\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$ は　(0) の斜線部分　……(答)

である．

$A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=A\cap\overline{(B\cup C)}$ は，これは $B\cup C$ の補集合と A の共通部分 (A から $B\cup C$ の要素を除いた集合) であるから

$A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$ は　(2) の斜線部分　……(答)

である．

(2)
$$U=\{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$
$$A=\{0,\ a-3,\ a+3\},\quad B=\{b-2,\ b+3\},\quad C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

(i) $A\subset U$ であることから

$$\begin{cases}-5\leqq a-3\leqq 5\\-5\leqq a+3\leqq 5\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}-2\leqq a\leqq 8\\-8\leqq a\leqq 2\end{cases}\quad\therefore\ -2\leqq a\leqq 2\quad\cdots\cdots ②$$

であり，a がとり得る値は

−2 以上 2 以下の整数　……(答)

である．また，$B\subset U$ であることから

$$\begin{cases}-5\leqq b-2\leqq 5\\-5\leqq b+3\leqq 5\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}-3\leqq b\leqq 7\\-8\leqq b\leqq 2\end{cases}\quad\therefore\ -3\leqq b\leqq 2$$

であり，b がとり得る値は

−3 以上 2 以下の整数　……(答)

である．

(ii) 与えられた条件は，① より

$$\overline{A\cup(B\cup C)}=\{-5,\ -4,\ -3,\ -2\}$$
$$\Longleftrightarrow A\cup(B\cup C)=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

である．A の要素 $a-3$ は ② より

$$-5\leqq a-3\leqq -1$$

を満たす．$A \subset A \cup (B \cup C)$ に注意して，要素を比較すると

$$a - 3 = -1 \qquad \therefore \quad a = \mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

がわかる．このとき $a + 3 = 5$ であり

$$\begin{aligned} A \cup C &= \{0,\ -1,\ 5\} \cup \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \\ &= \{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} \\ &= A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

である．$B \subset A \cup (B \cup C)$ であるから，B の要素と比較すると

$$\begin{cases} -1 \leqq b - 2 \\ b + 3 \leqq 5 \end{cases} \qquad \therefore \quad 1 \leqq b \leqq 2$$

を満たすから，$b = 1,\ 2$ の 2 通りがある．

(iii) $A,\ B,\ C$ が (ii) の条件を満たすとき

$$A = \{-1,\ 0,\ 5\}$$

であり

$$\begin{aligned} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) &= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} \\ &= \{-1,\ 0,\ 5\} \cap \overline{B} \qquad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

である．したがって

$b = 1$ のとき，$B = \{-1,\ 4\}$ であり，$\{-1,\ 0,\ 5\} \cap \overline{B} = \{0,\ 5\}$

$b = 2$ のとき，$B = \{0,\ 5\}$ であり，$\{-1,\ 0,\ 5\} \cap \overline{B} = \{-1\}$

となる．

よって

$A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$ の要素の個数が 1 個であるとすると，$b = \mathbf{2}$ ……(答)

であり

$A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$ の要素の個数が 2 個であるとすると，$b = \mathbf{1}$ ……(答)

である．

- ③ については

$$\begin{aligned} (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} &= \Big(\{-1,\ 0,\ 5\} \cap \{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 5\}\Big) \cap \overline{B} \\ &= \{-1,\ 0,\ 5\} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

あるいは，$A \cap C = \emptyset$ であるから，$A \cap \overline{C} = A$ であり

$$A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B}$$

と考えてもよい．