$m^2 - n^2 = 10!$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ の個数を求めよ．

(24 一橋大 後 経済 1)

【答】 105

【解答】

$$m^2 - n^2 = 10$$

左辺を因数分解，右辺を素因数分解すると

$$(m-n)(m+n) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．$m,\ n$ は正の整数であるから $m+n$ は正の整数，右辺も正の整数であるから，$m-n$ も正の整数である．したがって

$$0 < n < m$$

である．また，右辺は偶数であるから，$m-n,\ m+n$ の少なくとも一方は偶数であるが，$m-n,\ m+n$ の偶奇は一致するから，$m-n,\ m+n$ はともに偶数である．$m,\ n$ は正の整数 $a,\ b\ (a<b)$ を用いて

$$\begin{cases} m-n = 2a \\ m+n = 2b \end{cases} \qquad \therefore \quad m = a+b,\ n = b-a$$

と表すことができる．① を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ の個数は

$$2a \cdot 2b = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$\therefore \quad ab = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

を満たす正の整数の組 $(a,\ b)$ の個数と一致する．

右辺の約数 $a,\ b$ は 7 を含むか含まないかで 2 つに分けられるから $a=b$ となることはなく，一方が決まれば他方は一通りに決まるから，約数 a の個数と約数 b の個数は一致する．したがって，$a<b$ となる組 $(a,\ b)$ の個数と $a>b$ となる組 $(a,\ b)$ の個数も一致する．

よって，求める組 $(m,\ n)$ の個数は，組 $(a,\ b)$ の個数の半分，すなわち

$$\frac{(6+1)(4+1)(2+1)(1+1)}{2} = 7 \cdot 5 \cdot 3 = \mathbf{105} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 10! の素因数分解は

$$\begin{aligned} 10! &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

であるが，実数 x を超えない最大な整数を $[x]$(ガウス記号という) で表すと

$$\left[\frac{10}{2}\right] + \left[\frac{10}{4}\right] + \left[\frac{10}{8}\right] = 5+2+1 = 8$$

$$\left[\frac{10}{3}\right] + \left[\frac{10}{9}\right] = 3+1 = 4$$

$$\left[\frac{10}{5}\right] + \left[\frac{10}{10}\right] = 1+1 = 2$$

$$\left[\frac{10}{7}\right] = 1$$

であり

$$10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

となる．