$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)=2024$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ．

(24 一橋大 1)

【答】 $(m,\ n)=(1,\ 2026),\ (2,\ 678),\ (3,\ 342),\ (11,\ 46),\ (22,\ 38)$

【解答】

$$\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)=2024 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

左辺を計算すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)&=n\sum_{k=1}^{m}k-2\sum_{k=1}^{m}k^2\\&=n\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-2\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)\\&=\frac{1}{6}m(m+1)\{3n-2(2m+1)\}\\&=\frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2)\end{aligned}$$

となる．したがって

$$(*)\iff\frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2)=2^3\cdot 11\cdot 23$$

$$\therefore\quad m(m+1)(3n-4m-2)=2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$$

$m(m+1)$ は連続する 2 整数の積であり，$m,\ m+1$ の一方は奇数である．$2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ の奇数の約数は

$$1,\ 3,\ 11,\ 23,\ 33,\ 69,\ 253,\ 759$$

である．$m,\ m+1$ が連続する 2 整数であることに注意しながら，$2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ の約数の組み合わせを並べると

m	$m+1$	$3n-4m-2$
1	2	$2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 23$
2	3	$2^3\cdot 11\cdot 23$
3	4	$2^2\cdot 11\cdot 23$
11	12	$2^2\cdot 23$
22	23	$2^3\cdot 3$
23	24	$2\cdot 11$

$m=1$ のとき，　$3n-4\cdot 1-2=2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 23$　　$\therefore\quad n=2026$

$m=2$ のとき，　$3n-4\cdot 2-2=2^3\cdot 11\cdot 23$　　$\therefore\quad n=678$

$m=3$ のとき，　$3n-4\cdot 3-2=2^2\cdot 11\cdot 23$　　$\therefore\quad n=342$

$m=11$ のとき，　$3n-4\cdot 11-2=2^2\cdot 23$　　$\therefore\quad n=46$

$m=22$ のとき，　$3n-4\cdot 22-2=2^3\cdot 3$　　$\therefore\quad n=38$

$m=23$ のとき，　$3n-4\cdot 23-2=2\cdot 11$　　$\therefore\quad n=\dfrac{116}{3}$ 不適

以上より，

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(1,\ 2026),\ (2,\ 678),\ (3,\ 342),\ (11,\ 46),\ (22,\ 38)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．