ある自然数を八進法，九進法，十進法でそれぞれ表したとき，桁数がすべて同じになった．このような自然数で最大のものを求めよ．ただし，必要なら次を用いてもよい．

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011, \quad 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$$

(24 京都大 文系 4)

【答】 $8^{10} - 1$

【解答】

ある自然数 N を八進法，九進法，十進法でそれぞれ表したとき，桁数がすべて n であるための条件は

$$\begin{cases} 8^{n-1} \leqq N < 8^n \\ 9^{n-1} \leqq N < 9^n \\ 10^{n-1} \leqq N < 10^n \end{cases} \qquad \therefore \quad 10^{n-1} \leqq N < 8^n \qquad \cdots\cdots ①$$

である．① を満たす N が存在する条件は

$$10^{n-1} < 8^n$$
$$n - 1 < n \log_{10} 8$$
$$(1 - \log_{10} 8)n < 1$$
$$\therefore \quad n < \frac{1}{1 - \log_{10} 8} \quad (\because\ 0 < \log_{10} 8 < 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

$1 - \log_{10} 8 = 1 - 3\log_{10} 2$ と $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より

$$1 - 3 \times 0.3011 < 1 - 3\log_{10} 2 < 1 - 3 \times 0.3010$$
$$0.0967 < 1 - 3\log_{10} 2 < 0.0970$$
$$\frac{1}{0.0970} < \frac{1}{1 - 3\log_{10} 2} < \frac{1}{0.0967}$$
$$\therefore \quad 10.309\cdots < \frac{1}{1 - 3\log_{10} 2} < 10.341\cdots$$

したがって，② を満たす最大な自然数 n は

$$n = 10$$

であり，このとき ① は

$$10^9 \leqq N < 8^{10}$$

である．これを満たす最大な自然数 N は

$$N = \mathbf{8^{10} - 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．