T3，T4，T6 を次のようなタイマーとする．

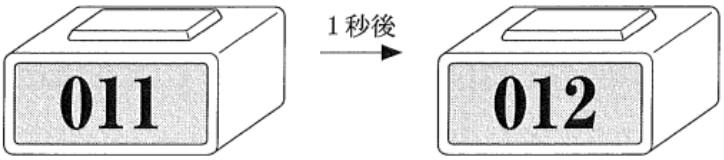
T3：3 進数を 3 桁表示するタイマー
T4：4 進数を 3 桁表示するタイマー
T6：6 進数を 3 桁表示するタイマー

なお，n 進数とは n 進法で表された数のことである．
これらのタイマーは，すべて次の**表示方法**に従うものとする．

表示方法

(a) スタートした時点でタイマーは 000 と表示されている．
(b) タイマーは，スタートした後，表示される数が 1 秒ごとに 1 ずつ増えていき，3 桁で表示できる最大の数が表示された 1 秒後に，表示が 000 に戻る．
(c) タイマーは表示が 000 に戻った後も，(b) と同様に，表示される数が 1 秒ごとに 1 ずつ増えていき，3 桁で表示できる最大の数が表示された 1 秒後に，表示が 000 に戻るという動作を繰り返す．

T 3



参考図

例えば，T3 はスタートしてから 3 進数で $12_{(3)}$ 秒後に 012 と表示される．その後，222 と表示された 1 秒後に表示が 000 に戻り，その $12_{(3)}$ 秒後に再び 012 と表示される．

(1) T6 は，スタートしてから 10 進数で 40 秒後に $\boxed{\text{アイウ}}$ と表示される．

T4 は，スタートしてから 2 進数で $10011_{(2)}$ 秒後に $\boxed{\text{エオカ}}$ と表示される．

(2) T4 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは，スタートしてから 10 進数で $\boxed{\text{キク}}$ 秒後であり，その後も $\boxed{\text{キク}}$ 秒ごとに表示が 000 に戻る．

同様の考察を T6 に対しても行うことにより，T4 と T6 を同時にスタートさせた後，初めて両方の表示が同時に 000 に戻るのは，スタートしてから 10 進数で $\boxed{\text{ケコサシ}}$ 秒後であることがわかる．

(3) 0 以上の整数 ℓ に対して，T4 をスタートさせた ℓ 秒後に T4 が 012 と表示されることと

ℓを $\boxed{\text{スセ}}$ で割った余りが $\boxed{\text{ソ}}$ であること

は同値である．ただし，$\boxed{\text{スセ}}$ と $\boxed{\text{ソ}}$ は 10 進法で表されているものとする．

T3 についても同様の考察を行うことにより，次のことがわかる．

T3 と T4 を同時にスタートさせてから，初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を m 秒とするとき，m は 10 進法で $\boxed{\text{タチツ}}$ と表される．

また，T4 と T6 の表示に関する記述として，次の⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{\text{テ}}$ である．

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ T4 と T6 を同時にスタートさせてから，m 秒後より前に初めて両方が同時に 012 と表示される．

① T4 と T6 を同時にスタートさせてから，ちょうど m 秒後に初めて両方が同時に 012 と表示される．

② T4 と T6 を同時にスタートさせてから，m 秒後より後に初めて両方が同時に 012 と表示される．

③ T4 と T6 を同時にスタートさせてから，両方が同時に 012 と表示されることはない．

(24 共通テスト 本試験 IA 4)

【答】

アイウ	エオカ	キク	ケコサシ	スセ	ソ	タチツ	テ
104	103	64	1728	64	6	518	3

【解答】

(1) 40 を 6 進法で表すと

$$40 = 1 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6 + 4 = 104_{(6)}$$

$$\begin{array}{r|rcr} 6 & 40 & & \\ \hline 6 & 6 & \cdots & 4 \\ \hline & 1 & \cdots & 0 \end{array}$$

であるから，T6 は，スタートしてから 10 進数で 40 秒後に

104 ……(答)

と表示される．

2 進数 $10011_{(2)}$ を 4 進法で表すと

$$\begin{aligned} 10011_{(2)} &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \\ &= (1 \cdot 2^4) + (0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2) + 1 \cdot 2 + 1 \\ &= 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 3 \\ &= 103_{(4)} \end{aligned}$$

であるから，T4 は，スタートしてから 2 進数で $10011_{(2)}$ 秒後に

103 ……(答)

と表示される．

(2) T4 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは，スタートしてから $1000_{(4)}$ 秒後であるから，これを 10 進数で表すと

$1000_{(4)} = 1 \cdot 4^3 =$ **64** 秒後 ……(答)

であり，その後も 64 秒ごとに表示が 000 に戻る．

同じく，T6 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは，スタートしてから $1000_{(6)}$ 秒後であるから，これを 10 進数で表すと

$1000_{(6)} = 1 \cdot 6^3 = 216$ 秒後 ……(答)

であり，その後も 216 秒ごとに表示が 000 に戻る．

T4 と T6 を同時にスタートさせた後，初めて両方の表示が同時に 000 に戻るのは，$64(=2^6)$ と $216(=2^3\cdot 3^3)$ の最小公倍数が

$$2^3\cdot 2^3\cdot 3^3=1728$$

であるから，スタートしてから 10 進数で

1728 秒後 ……(答)

であることがわかる．

(3) T4 は 10 進数で 64 秒後に元の数に戻るから，ℓ 秒後に T4 が 012 と表示されることは，$012_{(4)}=1\cdot 4+2=6$ であることから

ℓ を **64** で割った余りが **6** であること ……(答)

と同値である．したがって，整数 s を用いて

$$\ell=64\cdot s+6$$

と表すことができる

同じく，T3 は 10 進数で $1000_{(3)}=1\cdot 3^3=27$ 秒後に元の数に戻るから，ℓ 秒後に T3 が 012 と表示されることは，$012_{(3)}=1\cdot 3+2=5$ であることから

ℓ を 27 で割った余りが 5 であること

と同値である．したがって，整数 t を用いて

$$\ell=27\cdot t+5$$

と表すことができる．

T3 と T4 を同時にスタートさせてから，初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間 m は

$$\begin{cases} m=64s+6 & \cdots\cdots ① \\ m=27t+5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす最小な正の整数である．① − ② より

$$64s-27t+1=0$$
$$\therefore\quad 27t-64s=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

27 と -64 で互除法の計算を行うと

$$\begin{aligned} -64&=27\cdot(-3)+17\\ 27&=17\cdot 1+10\\ 17&=10\cdot 1+7\\ 10&=7\cdot 1+3\\ 7&=3\cdot 2+1 \end{aligned}$$

であり，逆に辿ると

$$\begin{aligned} 1&=7-3\cdot 2\\ &=7-(10-7\cdot 1)\cdot 2\\ &=7\cdot 3-10\cdot 2\\ &=(17-10\cdot 1)\cdot 3-10\cdot 2\\ &=17\cdot 3-10\cdot 5\\ &=17\cdot 3-(27-17\cdot 1)\cdot 5\\ &=17\cdot 8-27\cdot 5\\ &=\{-64-27\cdot(-3)\}\cdot 8-27\cdot 5\\ &=-64\cdot 8+27\cdot 19 \end{aligned}$$

すなわち，$s=8,\ t=19$ は ③ の解の 1 つである．

$$27\cdot 19-64\cdot 8=1 \qquad \cdots\cdots ④$$

③ − ④ より

$$27(t-19)-64(s-8)=0$$
$$27(t-19)=64(s-8) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

27 と 64 は互いに素であるから，$t-19$ は 64 の倍数であり，k を整数として

$$t-19=64k$$

と表すことができる．このとき ⑤ は

$$27\cdot 64k=64(s-8)$$
$$\therefore\quad s-8=27k$$

したがって，③ を満たす整数解は

$$(s,\ t)=(8+27k,\ 19+64k)\ (k \text{ は整数})$$

である．s の右辺にを ① に代入すると

$$64s+6=64(8+27k)+6=518+64\cdot 27k$$

であり，これを満たす最小な正の整数が m である．したがって，m は $k=0$ のときの値

518 ……(答)

である．

また，T6 は 10 進数で $1000_{(6)}=1\cdot 6^3=216$ 秒後に元の数に戻るから，ℓ 秒後に T6 が 012 と表示されることは，$012_{(6)}=1\cdot 6+2=8$ であるから

ℓ を 216 で割った余りが 8 であること

と同値である．これは

$$\ell=216\cdot u+8$$

と表されることである．

T4 と T6 を同時にスタートさせてから，初めて両方が同時に 012 と表示されるとするならば，

$$64s+6=216u+8$$
$$\therefore\quad 64s-216u=2$$
$$\therefore\quad 32s-108u=1$$

を満たす整数の組 $(s,\ u)$ が存在する．左辺は偶数であり，右辺は奇数であり，これを満たす整数の組 $(s,\ u)$ は存在しない．

よって，**T4 と T6 を同時にスタートさせてから，両方が同時に 012 と表示されることはない．** (③) ……(答)

- ③ を満たす整数解は

$$③ \iff t=\frac{64u+1}{27}=2s+\frac{10s+1}{27}$$

$t-2s$ は整数なので，$v=\dfrac{10u+1}{27}$ とおくと，v は整数である．

$$27v-10s=1$$

これを満たす整数 $v,\ s$ として $v=3,\ s=8$ がある．

$$27\cdot 3-10\cdot 8=1$$

であり

$$27(v-3)-10(s-8)=0$$
$$\therefore\quad 27(v-3)=10(s-8)$$

27 と 10 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$\begin{cases} v-3=10k \\ s-8=27k \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} v=3+10k \\ s=8+27k \end{cases}$$

$$v=2s+v=2(8+27k)+(3+10k)=19+64k$$

であり，③ を満たす整数解は

$$(s,\ t)=(8+27k,\ 19+64k)\ (k \text{ は整数})$$

である．