次の問に答えよ．

(1) 自然数 $m,\ n$ について，$2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数を求めよ．

(2) 6912 の正の約数のうち，12 で割り切れないものの総和を求めよ．

(24 北海道大 文系 1)

【答】

(1) $(m+1)(n+1)$
(2) 628

【解答】

(1) $2^m \cdot 3^n$ ($m,\ n$ は自然数) の正の約数は

$$2^a 3^b \ (a=0,\ 1,\ \cdots,\ m;\ b=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

であり，a の値は $m+1$ 通り，b の値は $n+1$ 通りあるから，求める個数は

$$\boldsymbol{(m+1)(n+1)}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $6912 = 2^8 \cdot 3^3$ であり，6912 の正の約数の総和は

$$\begin{aligned}&(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^8)(3^0+3^1+3^2+3^3)\\ &= \frac{2^9-1}{2-1} \cdot \frac{3^4-1}{3-1} = 511 \cdot 40\\ &= 20440\end{aligned}$$

である．

また，6912 の正の約数のうち 12 で割り切れるものは

$$\begin{aligned}&(2^2+2^3+\cdots+2^8)(3^1+3^2+3^3)\\ &= (511-1-2)(40-1)\\ &= 508 \cdot 39\\ &= 19812\end{aligned}$$

である．

よって，求める総和は

$$20440 - 19812 = \mathbf{628} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $2^a 3^b$ ($a=0,\ 1,\ \cdots,\ 8;\ b=0,\ 1,\ \cdots,\ 3$) のうち 12 で割り切れないものは
  - $a=0,\ 1$ のもの
  - $b=0$ のもの

  であるから，求める総和は

  $$\begin{aligned}&(2^0+2^1)(3^0+3^1+3^2+3^3)+(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^8)3^0-(2^0+2^1)3^0\\ &= 3 \cdot 40 + 511 - 3\\ &= 628\end{aligned}$$

  である．