素数を小さい順に並べて得られる数列を

$$p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$$

とする.

(1) p_{15} の値を求めよ.
(2) $n \geqq 12$ のとき，不等式 $p_n > 3n$ が成り立つことを示せ.

(24 大阪大 文系 3)

【答】

(1) $p_{15} = 47$
(2) 略

【解答】

(1) 素数を順に並べると

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
p_n	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	$\cdots$

であるから

$$\boldsymbol{p_{15} = 47} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

(2) 素数を小さい順に並べたときの n 番目の素数が p_n であり

「$n \geqq 12$ のとき，$p_n > 3n$ が成り立つ」 $\cdots\cdots$ $(*)$

ということは $n \geqq 12$ のとき，n 番目の素数は $3n$ より大きい，すなわち

「$n \geqq 12$ のとき，$3n$ 以下の素数の個数は $n-1$ 以下である」 $\cdots\cdots$ $(**)$

ということである.

$3n$ 以下の自然数の集合を U，集合 X の要素の個数を $N(X)$，実数 x を超えない最大整数を $[x]$ と表し，U にふるいにかけていく.

(i) U の部分集合で素数 2 の倍数の集合を A とおくと

$$N(3n) - N(A) = 3n - \left[\frac{3n}{2}\right]$$

(ア) n が偶数のとき，$n = 2k$ (k は 6 以上の自然数) とおくことができ

$$N(3n) - N(A) = 3 \cdot 2k - \left[\frac{3 \cdot 2k}{2}\right] = 6k - 3k = 3k = 2k + k \geqq n + 6$$

(イ) n が奇数のとき，$n = 2k+1$ (k は 6 以上の自然数) とおくことができ

$$\begin{aligned} N(3n) - N(A) &= 3 \cdot (2k+1) - \left[\frac{3 \cdot (2k+1)}{2}\right] \\ &= 6k + 3 - (3k+1) = 3k + 2 = (2k+1) + k + 1 \geqq n + 7 \end{aligned}$$

(ア)，(イ) いずれのときも $N(3n) - N(A) \geqq n + 6$ であり，U から素数 2 以外の 2 の倍数を除いた要素の個数は $(n+6)+1 = n+7$ 以上である ($(**)$ は成り立たない).

(ii) U の部分集合で素数 3 の倍数の集合を B とおくと

$$\begin{aligned}N(3n)-N(A\cup B)&=N(3n)-\{N(A)+N(B)-N(A\cap B)\}\\&=3n-\left(\left[\frac{3n}{2}\right]+\left[\frac{3n}{3}\right]-\left[\frac{3n}{6}\right]\right)\\&=3n-\left(\left[\frac{3n}{2}\right]+n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)\end{aligned}$$

(ア) n が偶数のとき，$n=2k$ (k は 6 以上の自然数) とおくことができ

$$\begin{aligned}N(3n)-N(A\cup B)&=3\cdot 2k-\left(\left[\frac{3\cdot 2k}{2}\right]+2k-\left[\frac{2k}{2}\right]\right)\\&=6k-(3k+2k-k)=2k=n\end{aligned}$$

(イ) n が奇数のとき，$n=2k+1$ (k は 6 以上の自然数) とおくことができ

$$\begin{aligned}&N(3n)-N(A\cup B)\\&=3\cdot(2k+1)-\left(\left[\frac{3\cdot(2k+1)}{2}\right]+(2k+1)-\left[\frac{(2k+1)}{2}\right]\right)\\&=6k+3-\{(3k+1)+(2k+1)-k\}\\&=2k+1\\&=n\end{aligned}$$

(ア)，(イ) いずれのときも $N(3n)-N(A\cup B)=n$ であり，U から素数 2, 3 以外の 2 の倍数，3 の倍数を除いた個数は $n+2$ である ((∗∗) は成り立たない).

(iii) さらに，U から 5 以外の 5 の倍数 (の一部) を除く.
$3n \geqq 3\cdot 12=36$ であり，U から 10, 15, 20, 25, 30, 35 の 6 個も除くと

$$(n+2)-6=n-4<n-1$$

であり．(∗∗) を満たす.

以上より，(∗) が成り立つ. ……(証明終わり)

- (∗) が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す.

(i) $n=12$ のとき
(1) の表より $p_{12}=37$ であり，$p_{12}>3\cdot 12$ は成り立つ.

(ii) $n=k$ での成立を仮定する.
$p_k>3k$ が成り立つ．$3\cdot 12=36$ 以上の素数 p_k，p_{k+1} は奇数であり

$$p_{k+1}\geqq p_k+2>3k+2 \quad (\because\ \text{帰納法の仮定})$$

$$\therefore\quad p_{k+1}\geqq 3(k+1)$$

$3(k+1)$ は合成数であるから，素数 p_{k+1} は

$$p_{k+1}>3(k+1)$$

である.

以上 (i), (ii) より，(∗) は成り立つ.